Série 3, Rendu en groupe (Corrigé)

Exercice 1

Soit $\mathbb{P} = \{p(x) = (a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n) \ : \ a_0, a_1, \ldots, a_n, \in \mathbb{R}$, pour un $n \in \mathbb{N}\}$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels. On définit sur cet ensemble les deux lois suivantes : la loi d'addition $p+q : (p+q)(x) = p(x) + q(x)$, $x \in \mathbb{R}$, et la loi de multiplication par un scalaire $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha p : (\alpha p)(x) = \alpha\, p(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

a) Montrer que $\mathbb{P}$ muni des deux lois définies plus haut est un espace vectoriel.

b) Montrer que l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}_n = \{p(x) = (a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n) \ : \ a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}\}$ muni des deux mêmes lois est un espace vectoriel.

c) Montrer que l'ensemble des polynômes de degré 2

$$\{p(x) = (a_0 + a_1 x + a_2 x^2) \ : \ a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}, \ a_2 \neq 0\}$$

muni des deux mêmes lois ***n'est pas*** un espace vectoriel.

Solution : Analyse :

- *Le thème ce sont les espaces vectoriels. Il faut en connaitre la définition.*
- *Il ne faut pas oublier les opérations : Somme de vecteurs et multiplication par un scalaire.*
- *Ici un des ensemble est constitué des polynômes de degré quelconque.*
- *Ensuite il y a deux sous-ensemble, il conviendra d'utilser la notion de sous-espace vectoriel*

Liste des outils :

- *Propriété des 2 opérations : addition et multiplication par un scalaire*
- *8 Axiomes : (lister les axiomes à vérifier)*
- *Définition d'un sous-espace vectoriel : (lister la définition avec les 2-3 règles)*
- *Un sou-espace vectoriel est lui même un espace vectoriel.*

Résolution *Un espace vectoriel réel est un ensemble non vide V d'objets (appelés vecteurs) sur lesquels sont définies deux opérations : l'addition*

$$\begin{array}{rcl} V \times V & \to & V \\ (u, v) & \mapsto & u + v \end{array}$$

et la multiplication par un scalaire

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R} \times V & \to & V \\ (\alpha, u) & \mapsto & \alpha u. \end{array}$$

Ces deux opérations doivent satisfaire les propriétés suivantes pour tous $u, v, w \in V$ et $c, d \in \mathbb{R}$.

1. $u + v = v + u$
2. $(u + v) + w = u + (v + w)$
3. *Il existe un élément zéro 0_V dans V tel que $u + 0_V = u$ pour tout u dans V*
4. *Il existe un élément $-u \in V$ tel que $u + (-u) = 0_V$*
5. $\lambda (u + v) = \lambda u + \lambda v$
6. $(\lambda + \gamma) u = \lambda u + \gamma u$
7. $\lambda (\gamma u) = (\lambda\gamma) u$
8. $1u = u.$

0) *D'abord il faut comprendre ce qui signifie $p = q$ pour deux polynômes. Soient*

$$\begin{array}{c} m \in \mathbb{N}, \quad p(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m, \quad a_0, a_1, \ldots, a_m, \in \mathbb{R} \\ n \in \mathbb{N}, \quad p(q) = b_0 + b_1 x + \ldots + b_n x^n, \quad b_0, b_1, \ldots, b_n, \in \mathbb{R} \end{array}$$

On dit que $p = q$ si le dégré des polynômes est le même et les coefficients sont égaux. Le degré du polynôme p est $d(p) = \max\{k = 0, ..., m, a_k \neq 0\}$, avec la convention que le degré du polynôme null est égale à $-\infty$. Donc, $p = q$ si

$$d(p) = d(q) \text{ et } a_k = b_k \text{ pour tout} k = 0, ..., d(p).$$

a) *On doit tout d'abord vérifier que l'espace $\mathbb{P}$ est fermé pour les lois d'addition et de multiplication par un scalaire, c-à-d ces lois sont stables (i.e. ces opérations sont à valeurs dans $\mathbb{P}$). Pour l'addition, on considère deux polynômes p et q plus haut. Si $m \neq n$, par exemple $m > n$, on pose $b_{n+1} = ... = b_m = 0$, ainsi on peut calculer*

$$\begin{aligned} (p + q)(x) &= (a_0 + a_1 x + ... a_m x^m) + (b_0 + b_1 x + ... + b_n x^n) \\ &= (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1) x + ... (a_m + b_m) x^m \end{aligned}$$

qui est un polynômes à coefficients $(a_k + b_k) \in \mathbb{R}$ pour $k = 0, ..., m$. Donc $(p + q) \in \mathbb{P}$.

Pour la mulitplication par un scalaire, soit $\lambda \in \mathbb{R}$*. On peut calculer*

$$(\lambda p)(x) \quad = \quad \lambda\,(a_0 + a_1 x + ...a_m x^m) \quad = \quad (\lambda a_0) \;+\; (\lambda a_1)\,x \;+\; ...\,(\lambda a_m)\,x^m$$

qui est un polynômes à coefficients (λa_k) *dans* $\mathbb{R}$ *pour* $k = 0, ..., m$*. Donc* $(\lambda p) \in \mathbb{P}$*.*
On doit maintenant vérifier les 8 propriétés ci-dessus. Dans la suite, on considère $\lambda, \gamma \in \mathbb{R}$*, les polynômes* p, q *ci dessous avec* $m = n$*, ainsi que*

$$m \in \mathbb{N}, \quad w(x) = c_0 + c_1 x + \ldots + c_m x^m, \quad c_0, c_1, \ldots, c_m, \in \mathbb{R}$$

1. $p + q = q + p$.

$$\begin{aligned}(p+q)(x) &\overset{\textit{Somme dans } \mathbb{P}}{=} (a_0 + b_0)\,x + ...\,(a_m + b_m)\,x^m \\ &\overset{\textit{Commutative dans } \mathbb{R}}{=} (b_0 + a_0)\,x + ...\,(b_m + a_m)\,x^m \\ &\overset{\textit{Somme dans } \mathbb{P}}{=} (q+p)(x)\end{aligned}$$

2. $(p + q) + w = p + (q + w)$

$$\begin{aligned}((p{+}q){+}w(x)) &\overset{\textit{Somme dans } \mathbb{P}}{=} ((a_0 + b_0)\,x + ...\,(a_m + b_m)\,x^m){+}(c_0 + c_1 x + \ldots + c_m x^m) \\ &\overset{\textit{Somme dans } \mathbb{P}}{=} ((a_0 + b_0) + c_0)\,x + ...\,((a_m + b_m) + c_m)\,x^m \\ &\overset{\textit{Associative dans } \mathbb{R}}{=} (a_0 + (b_0 + c_0))\,x + ...\,(a_m + (b_m + c_m))\,x^m \\ &\overset{\textit{Comme dans le passages précécents}}{=} (p(x) + (q(x) + w(x))\end{aligned}$$

3. *Suivant une propriété des espaces véctoriel, le candidat pour être l'élément nul* $0_{\mathbb{P}}$ *dans* $\mathbb{P}$ *se calcule par* $0 * p(x)$*. Il faut d'une côté calculer les coefficients de ce polynôme, et ensuite en vérifier les propriétés.*

$$(0p)(x) = 0\,(a_0 + a_1 x + ...a_m x^m) \overset{\textit{Multiplication par un scalaire}}{=} 0{+}0x{+}...{+}0x^m \overset{\textit{Abrege}}{=} 0x = 0_{\mathbb{P}}$$

C'est donc le polynôme avec tous les coefficients nuls. Le degré de ce polynôme est $-\infty$*. Propriété :*

$$\begin{aligned}(p + 0_{\mathbb{P}})(x) &\overset{\textit{Somme dans } \mathbb{P}}{=} (a_0 + 0) + (a_1 + 0)\,x + ...\,(a_m + 0)\,x^m \\ &\overset{\textit{Element neutre dans } \mathbb{R}}{=} a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m = p(x).\end{aligned}$$

4. *Suivant une propriété des espaces véctoriel, le candidat pour être l'élément opposé* $-p$ *dans* $\mathbb{P}$ *se calcule par* $(-1) * p(x)$*. Il faut d'une côté calculer les coefficients de ce polynôme, et ensuite en vérifier les propriétés.*

$$\begin{aligned}((-1)p)(x) &= -1\,(a_0 + a_1 x + ...a_m x^m) \\ &\overset{\textit{Multiplication par un scalaire}}{=} (-a_0) + ... + (-a_m)x^m \overset{\textit{Abrege}}{=} -p(x)\end{aligned}$$

C'est donc le polynôme avec tous les coefficients de p multipliés par (-1). Propriété :

$$(p + (-p))(x) \overset{\text{Somme dans } \mathbb{P}}{=} (a_0 - a_0) + ... (a_m - a_m) x^m$$
$$\overset{\text{Element neutre dans } \mathbb{R}}{=} 0 + 0x + \ldots + 0x^m = 0_{\mathbb{P}}.$$

5. *Les axiomes de 4 à 8 se vérifier similairement aux axiones précédents.*

b) *D'abord en remarque que $\mathbb{P}_n$ est un sous-ensemble de $\mathbb{P}$ et que les lois de somme et multiplication par un scalaire sont hérité de $\mathbb{P}$. On essaye donc de vérifier si $\mathbb{P}_n$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{P}$.*

On vérifie d'abord que l'espace $\mathbb{P}_n$ est fermé pour les lois d'addition et de multiplication par un scalaire. Pour l'addition, on considère deux polynômes p et q donnés par $(a_0 + a_1x + ... + a_nx^n)$ et $(b_0 + b_1x + ... + b_nx^n)$. Alors

$$\begin{aligned}(p + q)(t) &= (a_0 + a_1x + ... + a_nx^n) + (b_0 + b_1x + ... + b_nx^n) \\ &= (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1) x + ... + (a_n + b_n) x^n,\end{aligned}$$

qui est bien un polynôme de degré $\leq n$. Même raisonnement pour l'autre loi.

que $\mathbb{P}_n$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{P}$.

c) *Il suffit de montrer qu'au moins l'une des 8 propriétés ci-dessus n'est pas vérifiée. L'élément zéro devrait être le polynôme nul $p \equiv 0$, qui n'est pas un polynôme de degré 2, et donc n'appartient pas à l'espace, ce qui contredit la propriété 3.*
Autre solution : on peut montrer que l'ensemble n'est pas fermé pour l'addition. On considère deux polynômes p et q de degré 2 donnés par $p(x) = (x+x^2)$, $q(x) = (x-x^2)$. On a

$$(p + q)(x) = \left(x + x^2\right) + \left(x - x^2\right) = 2x,$$

qui est un polynôme de degré 1 et non 2. Par conséquent il n'appartient pas à l'ensemble.

Contrôle *: Est-ce que la vérification des opérations et des axiomes a été faite correctement ? Est-ce que j'ai bien vérifié le 2+8 "choses" ? Est-ce que les cas particulier ont été pris en compte ? Par exemple, quid si tout les coefficients a_j sont nuls ?*