Algèbre linéaire
Exercice SVD

Simone Deparis

EPFL Lausanne – MATH

Semaine 14

Serie 14, Ex 11 (question ouverte janvier 2024) I

Soit A une matrice et soient $\vec{w}_1, \vec{w}_2$ deux vecteurs propres de la matrice $A^T A$, tels que

$$\vec{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \vec{w}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ A\vec{w}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \ A\vec{w}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Utiliser ces informations afin de trouver des matrices U, Σ et V telles que A possède une décomposition en valeurs singulières de la forme

$$A = U\Sigma V^T.$$

Serie 14, Ex 11 (question ouverte janvier 2024) II

Démarche proposée (à lire si vous êtes en difficulté) :

- d'abord déduisez le tailles des matrices A, U, Σ et V ;
- normalisez les vecteurs $\vec{w}_1$ et $\vec{w}_2$, on obtient $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$;
- calculez $A\vec{v}_1$ et $A\vec{v}_2$;
- calculez les valeurs singulières et définissez Σ ;
- complétez $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ en une base de $\mathbb{R}^4$ et assurez vous d'obtenir une base orthonormée en utilisant la méthode de Gram-Schmidt ;
- définissez V en utilisant $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4$;
- normalisez $A\vec{v}_1$ et $A\vec{v}_2$ et utilisez-les pour définir U.

Tailles des matrices A, U, Σ et V

$A\vec{w}_i \in \mathbb{R}^2$ pour $i = 1, 2$, alors A possède 2 lignes.
$\vec{w}_i \in \mathbb{R}^4$ pour $i = 1, 2$, alors A possède 4 colonnes.

Par conséquent, A est 2×4.

Ce qui implique que U est 2×2, Σ est 2×4, et V est 4×4.

On remarque que $\vec{w}_1 \cdot \vec{w}_2 = 0$, et que $\|\vec{w}_1\| = \sqrt{2}$, $\|\vec{w}_2\| = \sqrt{3}$. Comme $\vec{w}_i \in \mathbb{R}^4$ pour $i = 1, 2$ ne sont pas des vecteur propres normalisés de $A^T A$, on définit d'abord

$$\vec{v}_1 = \frac{\vec{w}_1}{\|\vec{w}_1\|} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{v}_2 = \frac{\vec{w}_2}{\|\vec{w}_2\|} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On conclut que $\vec{v}_i \in \mathbb{R}^4$ pour $i = 1, 2$ sont des vecteur propres normalisés de $A^T A$. En plus,

$$\|A\vec{v}_1\| = \left\| \frac{A\vec{w}_1}{\|\vec{w}_1\|} \right\| = \frac{1}{\sqrt{2}} \|A\vec{w}_1\| = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}},$$
$$\|A\vec{v}_2\| = \left\| \frac{A\vec{w}_2}{\|\vec{w}_2\|} \right\| = \frac{1}{\sqrt{3}} \|A\vec{w}_2\| = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}.$$

valeurs singulières et Σ II

En conséquence, A possède les valeur singulières, $\sigma_1 = \sqrt{5}/\sqrt{2}$ et $\sigma_2 = \sqrt{5}/\sqrt{3}$, avec $\sigma_1 > \sigma_2$, et donc

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{5}/\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{5}/\sqrt{3} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

complétez $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ en une base orthonormée de $\mathbb{R}^4$ I

on calcule d'abord une base du complément orthogonale $\text{Vect}\,\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}^\perp = \text{Vect}\,\{\vec{w}_1, \vec{w}_2\}^\perp$, qui est donc donné par le noyau de la matrice

$$[\vec{w}_1\, \vec{w}_2]^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

dont la forme échelonnée réduite est obtenue de

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - L_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_2 \leftarrow \frac{1}{2} L_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 + L_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}.$$

En conséquence, Une base du complément orthogonal $\mathrm{Vect}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}^{\perp}$ est

$$\left\{ \begin{pmatrix} -1/2 \\ -1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Si l'on normalise cette base on trouve une base orthonormée $\{\vec{v}_3, \vec{v}_4\}$ de $\mathrm{Vect}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}^{\perp}$ donnée par

$$\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \\ -2/\sqrt{6} \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{v}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On conclut que $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4\}$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^4$. On définit donc la matrice orthogonale

$$V = [\vec{v}_1\, \vec{v}_2\, \vec{v}_3\, \vec{v}_4] = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

normaliser $A\vec{v}_1$ et $A\vec{v}_2$ et définir U. I

On va finalement calculer la matrice orthogonale 2×2 $U = [\vec{u}_1\, \vec{u}_2]$. Pour le faire on utilise les identités

$$\vec{u}_i = \frac{A\vec{v}_i}{\sigma_i} \qquad \text{(Vérifiez aussi que } \|A\vec{v}_i\| = \sigma_i)$$

pour $i = 1, 2$, vu que $\sigma_1 \geq \sigma_2 > 0$. On trouve ainsi

$$\vec{u}_1 = \frac{A\vec{v}_1}{\sigma_1} = \frac{A\vec{w}_1}{\sigma_1\|\vec{w}_1\|} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} \\ -1/\sqrt{5} \end{pmatrix},$$

$$\vec{u}_2 = \frac{A\vec{v}_2}{\sigma_2} = \frac{A\vec{w}_2}{\sigma_2\|\vec{w}_2\|} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} \end{pmatrix}.$$

En conséquence,

$$U = [\vec{u}_1\, \vec{u}_2] = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{-1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}.$$

En conclusion, on a

$$A = U\Sigma V^T = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{5}{2}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{5}{3}} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T .$$