

Algèbre linéaire

SVD

Simone Deparis

EPFL Lausanne – MATH

Semaine 14



Séance de Q&A en janvier

L'examen aura lieu lundi 20 janvier. Quand aimeriez vous avoir une séance de Q&A ?

A. Mercredi 15 janvier 16h15-18h00.

B. Vendredi 17 janvier 14h15-16h00.

Il faudra soumettre les questions 24 heures avant sur Ed. Je ne répondrai pas à d'autres questions !

Évaluation du cours : à la fin de l'examen sur papier.

Chapitre 10 : Matrices orthogonales, matrices symétriques

Calculs à savoir faire :

- 1 Calculer avec des matrices symétriques et orthogonaux.
- 2 Diagonaliser orthogonalement une matrice symétrique.
- 3 Calculer les valeurs singulières d'une matrice donnée.
- 4 Calculer la SVD d'une matrice donnée.

10.10 Valeurs singulières I

Soit A une matrice $m \times n$.

On appelle *valeurs singulières* de A les racines carrées des valeurs propres de la matrice $A^T A$.

On les note $\sigma_1, \dots, \sigma_n$, de telle sorte que $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_n \geq 0$.

Ainsi, il existe une base $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n)$ de $\mathbb{R}^n$ composée de vecteurs propres de $A^T A$ avec valeurs propres correspondantes $\sigma_1^2 = \lambda_1 \geq \sigma_2^2 = \lambda_2 \geq \dots \geq \sigma_n^2 = \lambda_n \geq 0$.

10.11 Valeurs singulières, théorème fondamental

Théorème

Soient A une matrice $m \times n$ et $\sigma_1 \geq \dots \geq \sigma_n \geq 0$ les *valeurs singulières* de A .

Soit $(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n)$ une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ constituée de vecteurs propres de $A^T A$ associés aux valeurs propres $\sigma_1^2, \dots, \sigma_n^2$.

Supposons que A admette r valeurs singulières non-nulles. Alors

- $(A\vec{v}_1, \dots, A\vec{v}_r)$ est une base orthogonale de $\text{Col}(A)$.
- $\text{rang}(A) = r$.
- $(\frac{A\vec{v}_1}{\sigma_1}, \dots, \frac{A\vec{v}_r}{\sigma_r})$ est une base orthonormée de $\text{Col}(A)$.

10.12 Décomposition en valeurs singulières I

Soit A une matrice $m \times n$. On cherche des matrices

- U orthogonale $m \times m$,
- V orthogonale $n \times n$ et
- Σ diagonale, avec sur la diagonale les *valeurs singulières* de A
 $\sigma_1 \geq \dots \geq \sigma_n \geq 0$,

telles que $A = U\Sigma V^T$.

On appelle ceci la *Décomposition en valeurs singulières* de A .

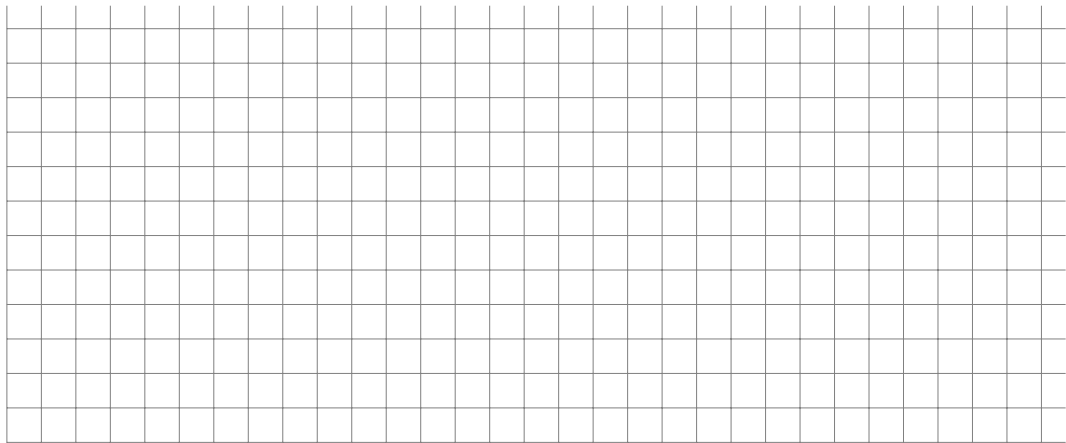
10.13 Décompositon en valeurs singulières, méthode

- Diagonaliser $A^T A$ en base orthonormée : $A^T A = P D P^T$ avec
 - les valeurs propres $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n$ sur la diagonale de D ,
 - P orthogonale : ses colonnes $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ sont orthonormées ;
- Définir $\sigma_k = \sqrt{\lambda_k}$ pour $k = 1, \dots, n$, ainsi qu'identifier le plus grand r tel que $\sigma_r > 0$;
- Définir Σ comme matrice $m \times n$ avec les valeurs σ_k en position (k, k) , pour $k = 1, \dots, r$, et 0 ailleurs ;
- $(\frac{A\vec{v}_1}{\sigma_1}, \dots, \frac{A\vec{v}_r}{\sigma_r}) = (\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_r)$ est une base orthonormée de $\text{Col}(A) \subset \mathbb{R}^m$.
Compléter cette base afin d'avoir une base $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_m)$ orthonormée de $\mathbb{R}^m$.
- Définir $V = P$ et $U = (\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_m)$.

Serie 14, Ex 7

Calculer les valeurs singulières de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

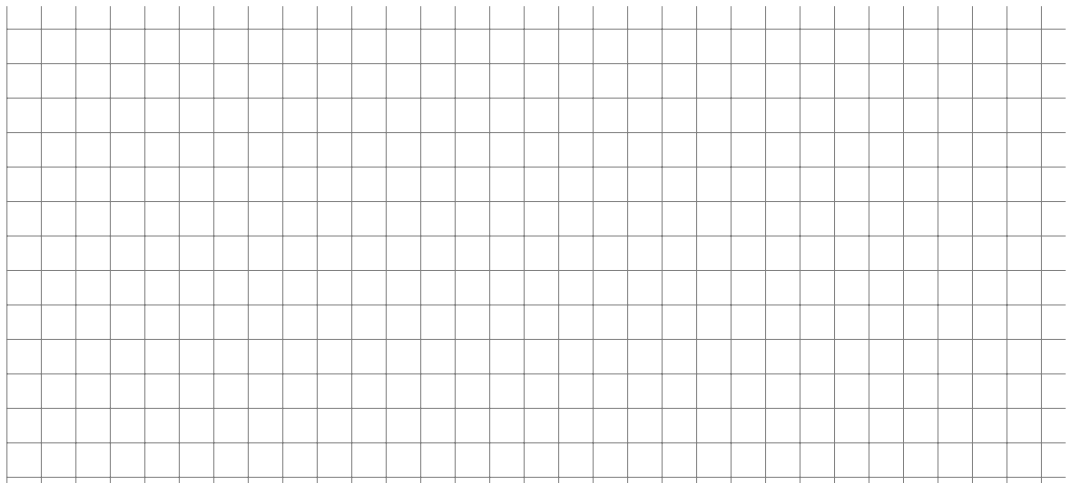


Serie 14, Ex 7, solution

Serie 14, Ex 8

Calculer les valeurs singulières de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

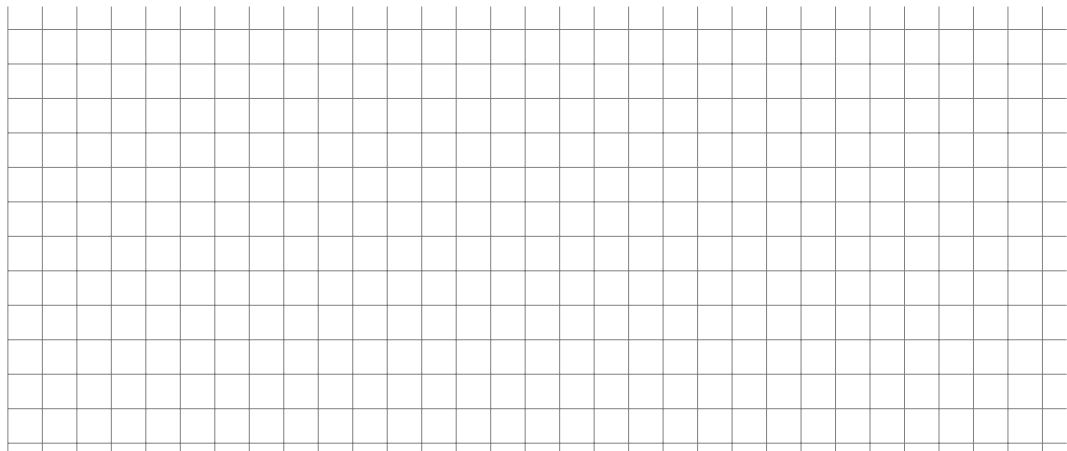


Serie 14, Ex 8, solution

Serie 14, Ex 9

Calculer une SVD de la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

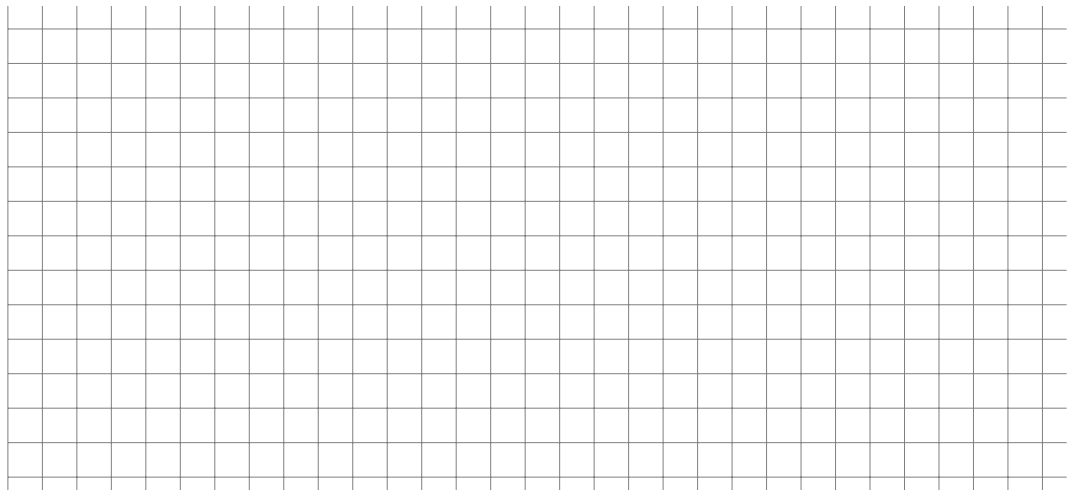


Serie 14, Ex 9, solution

Serie 14, Ex 10

Calculer une SVD de la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$



Serie 14, Ex 10, solution

Serie 14, Ex 11 (question ouverte janvier 2024) I

Soit A une matrice et soient $\vec{w}_1, \vec{w}_2$ deux vecteurs propres de la matrice $A^T A$, tels que

$$\vec{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{w}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A\vec{w}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad A\vec{w}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Utiliser ces informations afin de trouver des matrices U, Σ et V telles que A possède une décomposition en valeurs singulières de la forme

$$A = U\Sigma V^T.$$

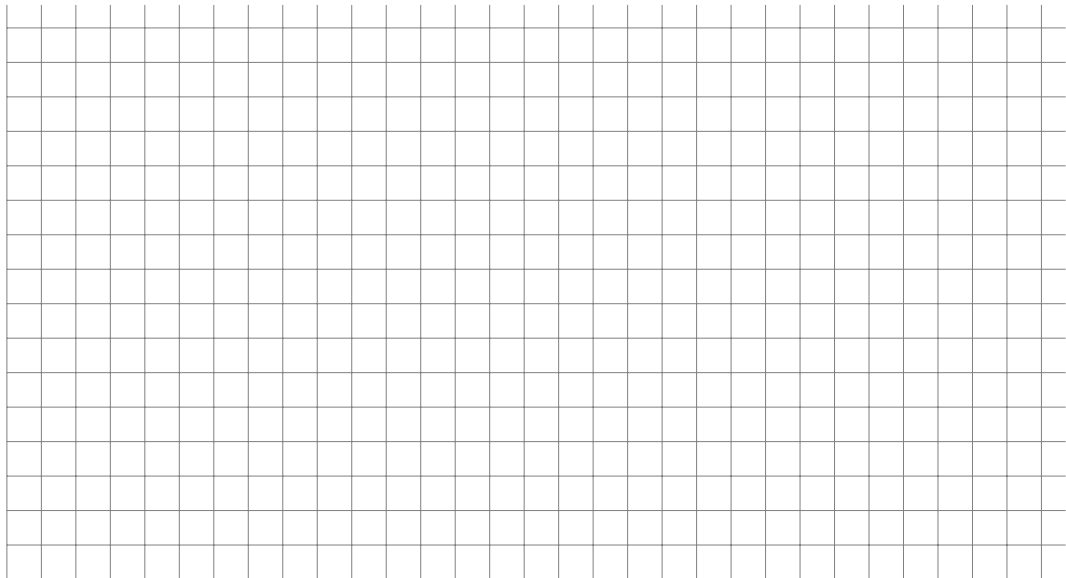
Démarche proposée (à lire si vous êtes en difficulté) :

- d'abord déduisez les tailles des matrices A, U, Σ et V ;

Serie 14, Ex 11 (question ouverte janvier 2024) II

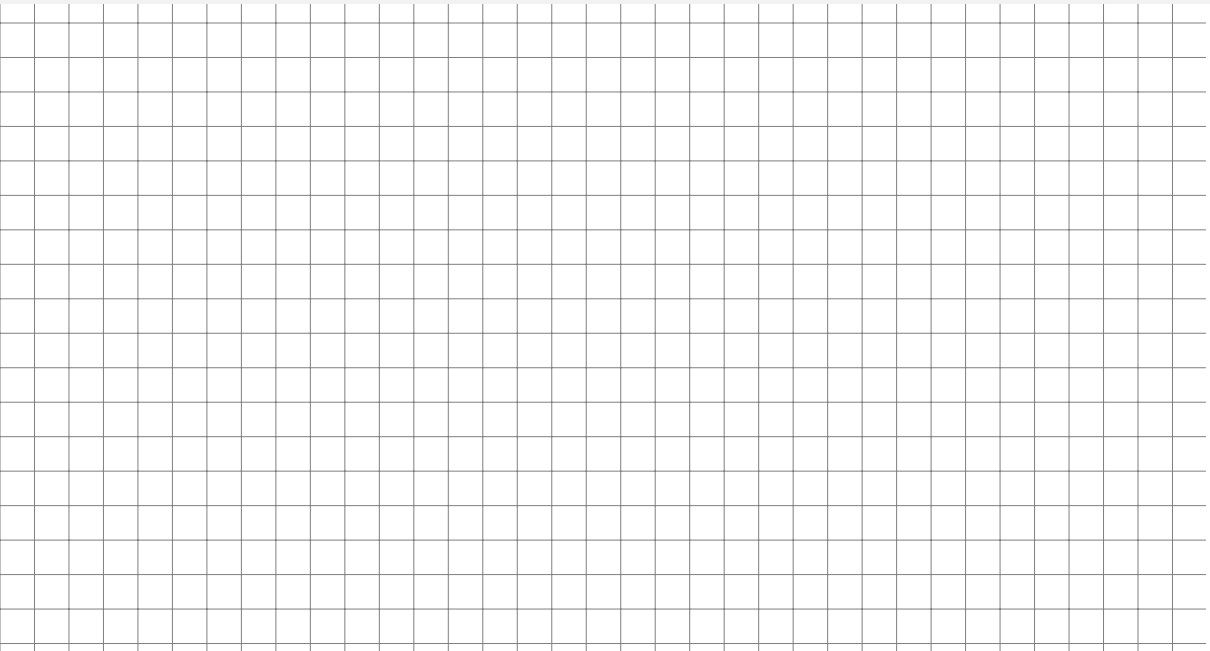
- normalisez les vecteurs $\vec{w}_1$ et $\vec{w}_2$, on obtient $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$;
- calculez $A\vec{v}_1$ et $A\vec{v}_2$;
- calculez les valeurs singulières et définissez Σ ;
- complétez $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ en une base de $\mathbb{R}^4$ et assurez vous d'obtenir une base orthonormée en utilisant la méthode de Gram-Schmidt ;
- définissez V en utilisant $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4$;
- normalisez $A\vec{v}_1$ et $A\vec{v}_2$ et utilisez-les pour définir U .

Serie 14, Ex 11 (question ouverte janvier 2024) III



Serie 14, Ex 11 (question ouverte janvier 2024) IV

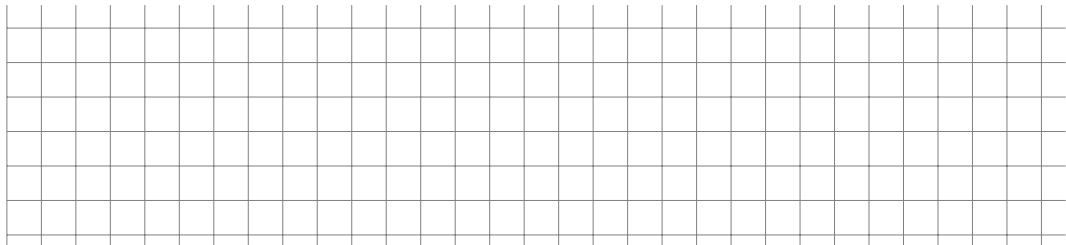
Serie 14, Ex 11 (question ouverte janvier 2024), solution



Serie 14, Ex 12

Parmi les affirmation suivantes, lesquelles sont toujours vraies ?

- 1 Soit A une matrice. Alors AA^T et $A^T A$ ont les mêmes valeurs singulières.
- 2 Une matrice A de taille $n \times n$ est inversible si et seulement si 0 n'est pas valeur singulière de A .
- 3 Soit A une matrice carrée. Alors toutes les valeurs propres de A sont aussi des valeurs singulières de A .
- 4 Soit A une matrice et soit $A = U\Sigma V^T$ une SVD de A . Alors $V\Sigma U^T$ est une SVD de A^T .
- 5 Soit A une matrice de taille 3×3 avec valeurs singulières 1, 3 et 5. Alors le déterminant de A est 15.



Serie 14, Ex 12, solution

Devoirs pour jeudi :

- Réviser le matériel des chapitres 5-7.
- Faire la partie commune de l'examen de 2016 (144 minutes).
- Indiquer sur le questionnaire de Moodle quelle partie du cours vous pose encore des difficultés.

Algèbre linéaire

Revisions

Simone Deparis

EPFL Lausanne – MATH

Semaine 14



- environ 55-60% QCM
- environ 15-20% vrai/faux
- environ 20-30% questions ouvertes (avec des petites preuves à faire, et/ou des questions calculatoires)

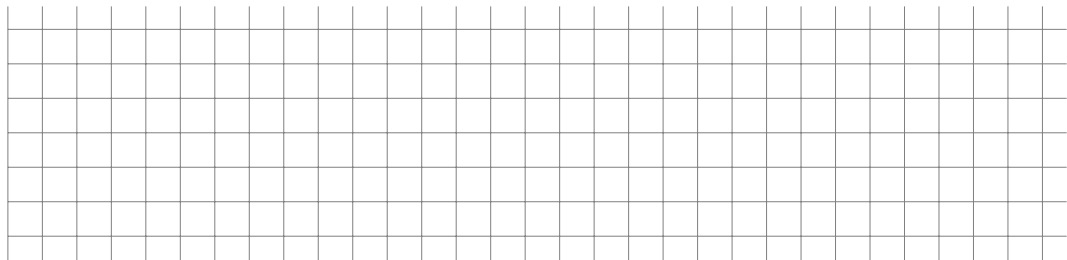
Exercise 1

Pour quels nombres réels b est-il vrai que le déterminant de la matrice

$$\begin{pmatrix} 2b & 6 & 4 \\ 0 & b-1 & 1 \\ -b & 2b-5 & 5 \end{pmatrix}$$

est égal à 0 ?

- ☐ 0 et 1
- ☐ aucun
- ☐ 0 et -1
- ☐ -1 et 1



Exercise 1, solution

Exercise 2

On considère l'espace vectoriel formé par les matrices de taille 3×3 de la forme

$\begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ b & 0 & c \\ 0 & d & 0 \end{pmatrix}$ où $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Soit h un paramètre réel. Alors les matrices

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ h & 0 & 1 \\ 0 & h & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & h & 0 \\ 4 & 0 & h \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3h \\ 0 & 4h & 0 \end{pmatrix}$$

sont linéairement indépendantes

- ☐ si et seulement si $h \neq 2, h \neq -2, h \neq 1/3$ et $h \neq 1/2$.
- ☐ si et seulement si $h \neq 1/2$ et $h \neq 1/3$.
- ☐ pour toute valeur réelle de h .
- ☐ si et seulement si $h \neq 2$ et $h \neq -2$.

Exercise 2, solution

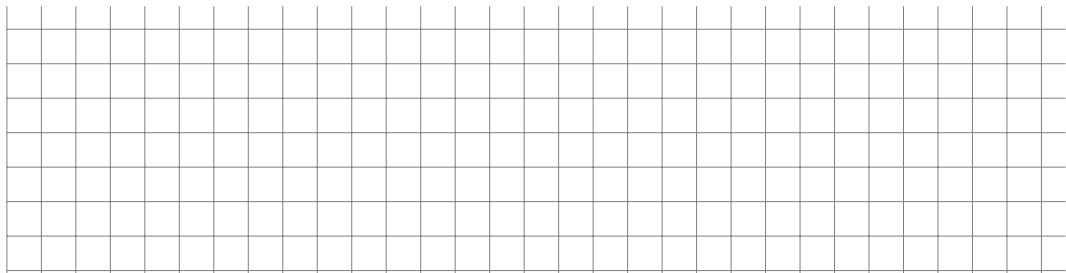
Exercise 3

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 3 & 2 & 0 \\ -1 & \frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix}.$$

Si $B = A^{-1}$, alors l'élément b_{12} de B est égal à

- ☐ $-\frac{2}{3}.$
- ☐ $\frac{1}{9}.$
- ☐ $-\frac{1}{9}.$
- ☐ $\frac{1}{3}.$



Exercise 3, solution

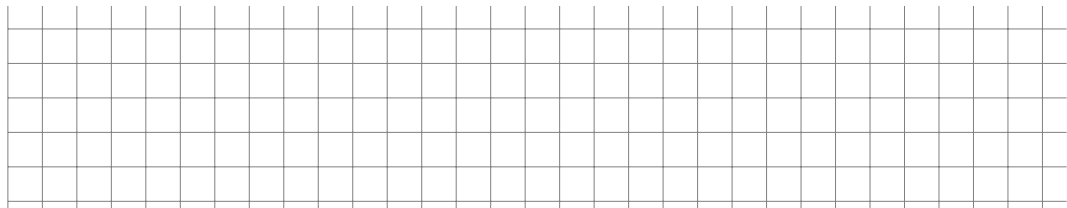
Exercise 4

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

Si $A = LU$ est une factorisation LU de A (L est une matrice triangulaire inférieure dont les éléments diagonaux sont égaux à 1 et U est une matrice triangulaire supérieure), alors l'élément l_{32} de L est

- ☐ $1/2$.
- ☐ $-3/2$.
- ☐ $3/2$.
- ☐ 3 .



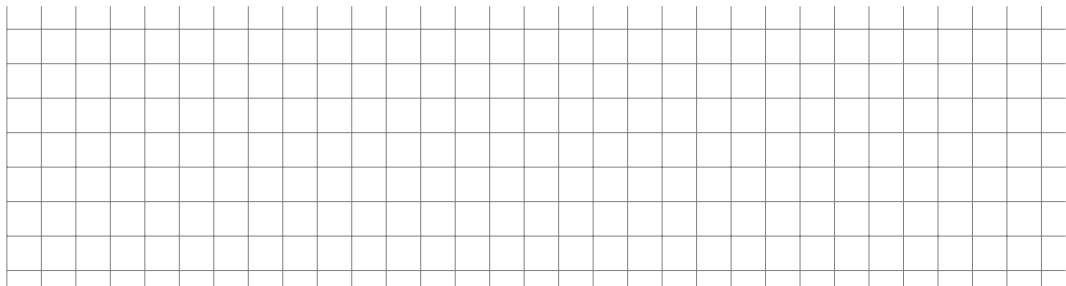
Exercise 4, solution

Exercise 5

Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 5 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$. Alors la solution au sens des moindres

carrés $\hat{\vec{x}} = \begin{pmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{pmatrix}$ de l'équation $A\vec{x} = \vec{b}$ satisfait

- ☐ $\hat{x}_2 = -35/6.$
- ☐ $\hat{x}_2 = 41/6.$
- ☐ $\hat{x}_2 = -5/6.$
- ☐ $\hat{x}_2 = 1/6.$



Exercise 5, solution

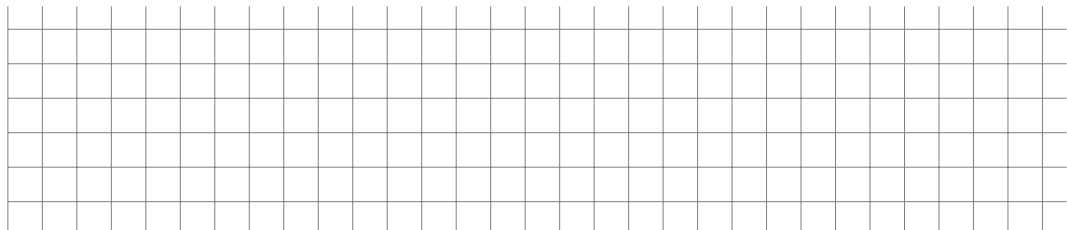
Exercise 6

La dimension du sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ donné par

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix} \in \text{Span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ tels que } v_4 = 0 \right\}$$

est

- ☐ 4.
- ☐ 3.
- ☐ 1.
- ☐ 2.



Exercise 6, solution

Exercise 7

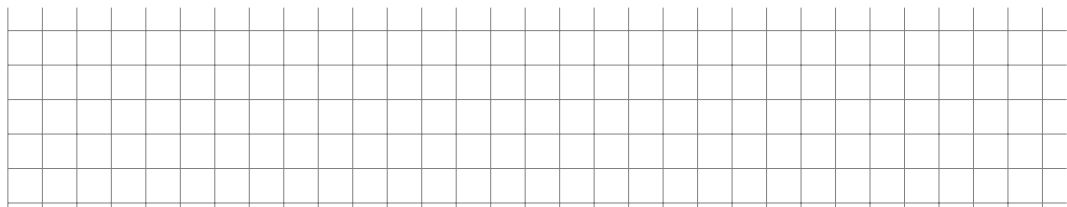
Soit $T : \mathbb{P}_2 \rightarrow \mathbb{P}_3$ l'application linéaire définie par $T(p(t)) = (t+1)p(t)$. Alors la matrice de T dans les bases $\{1, t, t^2\}$ de $\mathbb{P}_2$ et $\{1, t, t^2, t^3\}$ de $\mathbb{P}_3$ est

$$\square \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\square \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\square \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\square \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$



Exercise 7, solution

Exercice 8

Soient l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire euclidien et le sous-espace vectoriel

$$V = \text{Span} \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}.$$

Alors, la projection orthogonale du vecteur $\begin{pmatrix} 6 \\ 21 \\ 3 \end{pmatrix}$ sur V est

☐ $\begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix}.$

☐ $\begin{pmatrix} 2 \\ 16 \\ 11 \end{pmatrix}.$

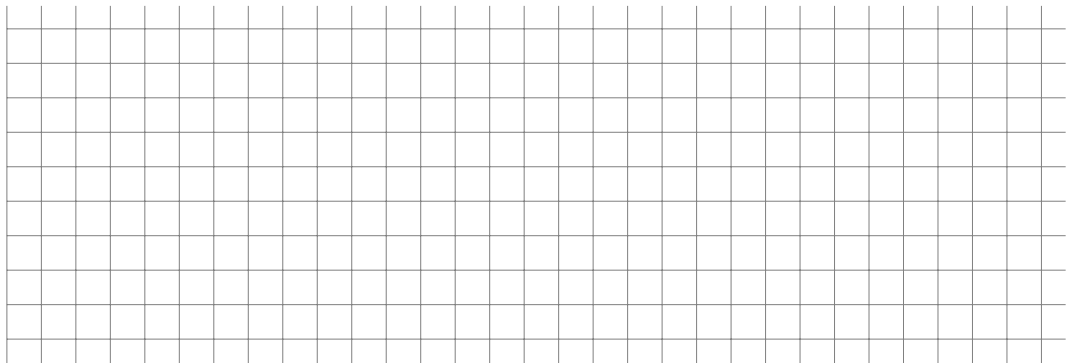
☐ $\begin{pmatrix} 10 \\ 26 \end{pmatrix}.$

Exercise 8, solution

Exercise 9

Soit un paramètre $b \in \mathbb{R}$. Alors le polynôme $q(t) = bt - t^2$ appartient au sous-espace vectoriel de $\mathbb{P}_2$ engendré par $p_1(t) = 1 + t + t^2$ et $p_2(t) = 2 - t + 3t^2$ lorsque

- ☐ $b = 1.$
- ☐ $b = -1.$
- ☐ $b = -3.$
- ☐ $b = 3.$



Exercise 9, solution

Exercise 10

Soient

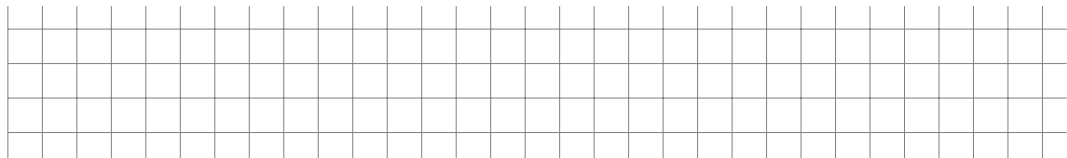
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -3 & -5 & -1 \\ -2 & -4 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ h^3 - h \\ h^3 - 4h + 4 \end{pmatrix}$$

où $h \in \mathbb{R}$ est un paramètre. Alors l'équation matricielle

$$A\vec{x} = \vec{b}$$

possède une infinité de solutions

- ☐ pour $h = -2$, $h = 0$ et $h = 2$.
- ☐ pour $h = -2$, $h = 1$ et $h = 2$.
- ☐ pour $h = -1$, $h = 0$ et $h = 1$.
- ☐ pour $h = -1$, $h = -1/2$ et $h = 1/2$.



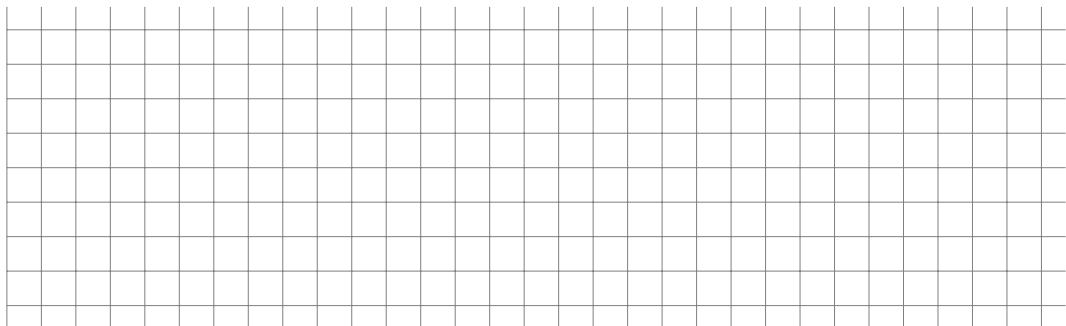
Exercise 10, solution

Exercise 11

Soit A une matrice de taille 4×5 telle que l'équation matricielle $A\vec{x} = \vec{0}$ possède exactement deux variables libres. Quelle est la dimension du sous-espace vectoriel

$$W = \left\{ \vec{b} \in \mathbb{R}^4 \text{ tels que } A\vec{x} = \vec{b} \text{ est compatible} \right\} ?$$

- ☐ 0
- ☐ 1
- ☐ 2
- ☐ 3



Exercise 11, solution

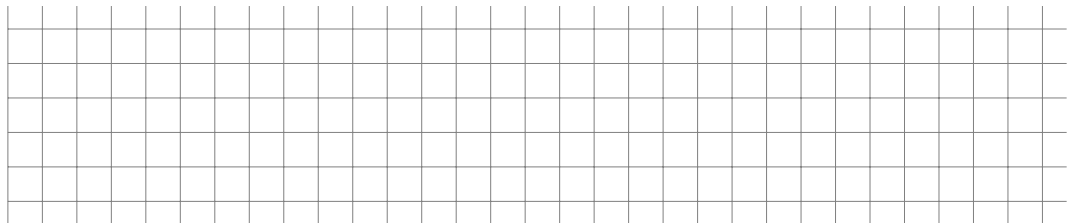
Exercise 12

Soient

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Alors

- ☐ $\dim(\text{Ker } A) = 2$ et $\dim(\text{Ker } B) = 2$.
- ☐ $\dim(\text{Ker } A) \neq 2$ et $\dim(\text{Ker } B) \neq 2$.
- ☐ $\dim(\text{Ker } A) \neq 2$ et $\dim(\text{Ker } B) = 2$.
- ☐ $\dim(\text{Ker } A) = 2$ et $\dim(\text{Ker } B) \neq 2$.



Exercise 12, solution

Exercise 13

Soit $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$ l'application linéaire définie par

$$T \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 2x_1 - 3x_2 \\ x_3 + x_1 + x_4 \end{pmatrix}.$$

Alors la matrice de T dans les bases

$$\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \text{ et } \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

est

☐ $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2/3 & 2/3 \\ 1 & -2 & -1/3 & -1/3 \end{pmatrix}.$

☐ $\begin{pmatrix} 4 & -4 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$

Exercise 13, solution

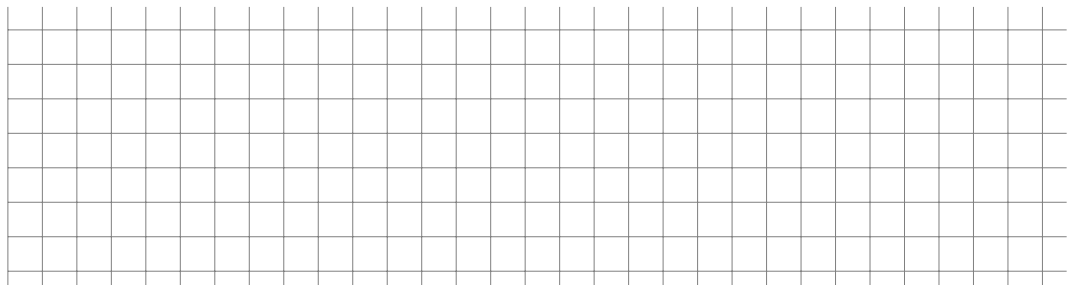
Exercise 14

Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Alors les valeurs propres de A sont

- ☐ -2 et 3 .
- ☐ 3 et 4 .
- ☐ -5 , -1 et 1 .
- ☐ -2 et 7 .

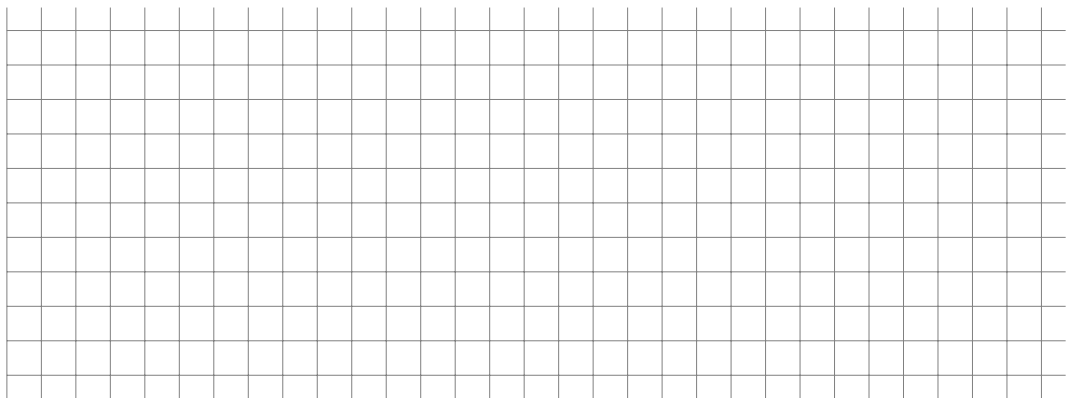


Exercise 14, solution

Exercise 15

Quel énoncé est vrai pour toute matrice A de taille $n \times n$ et tout vecteur $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$?

- ☐ L'équation $A\vec{x} = \vec{b}$ a au plus une solution.
- ☐ L'équation $A\vec{x} = \vec{b}$ a au moins une solution.
- ☐ L'équation $A\vec{x} = \vec{b}$ a au plus une solution au sens des moindres carrés.
- ☐ L'équation $A\vec{x} = \vec{b}$ a au moins une solution au sens des moindres carrés.



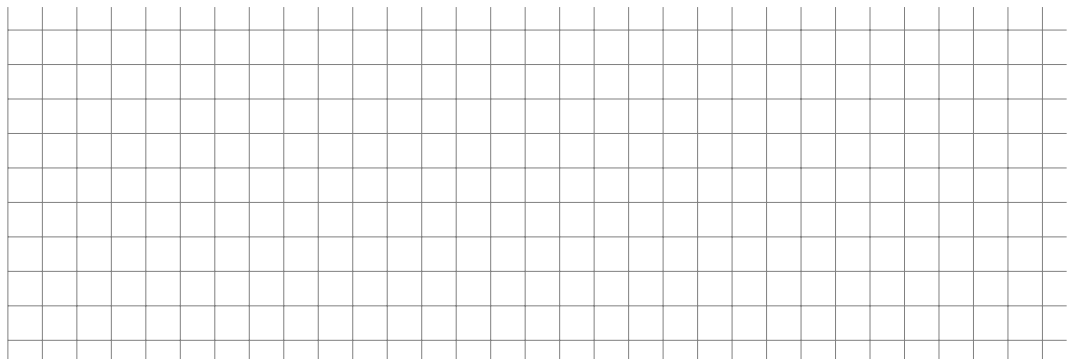
Exercise 15, solution

Exercise 16

Soit $\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_4\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$. Soit $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{P}_4$ une application linéaire. Si le rang de T est égal à 4, alors l'ensemble

$\{T(\vec{e}_1 + \vec{e}_2), T(2\vec{e}_2), T(\vec{e}_3 + \vec{e}_4), T(\vec{e}_4 + \vec{e}_1)\}$

- ☐ est une base de $\mathbb{P}_4$.
- ☐ n'est pas linéairement indépendante.
- ☐ ne peut pas être complétée en une base de $\mathbb{P}_4$.
- ☐ peut être complétée en une base de $\mathbb{P}_4$.



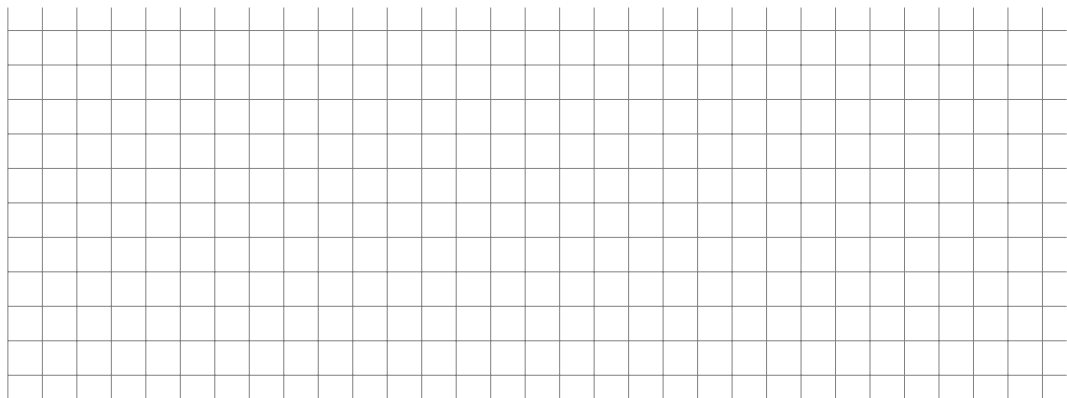
Exercise 16, solution

Exercise 17

Soient A et B deux matrices diagonalisables de taille $n \times n$ telles que $A \neq B$.

Alors

- ☐ AB est toujours diagonalisable.
- ☐ AB n'est jamais diagonalisable.
- ☐ AB est diagonalisable si A et B ont les mêmes valeurs propres.
- ☐ AB est diagonalisable si A et B ont les mêmes vecteurs propres.

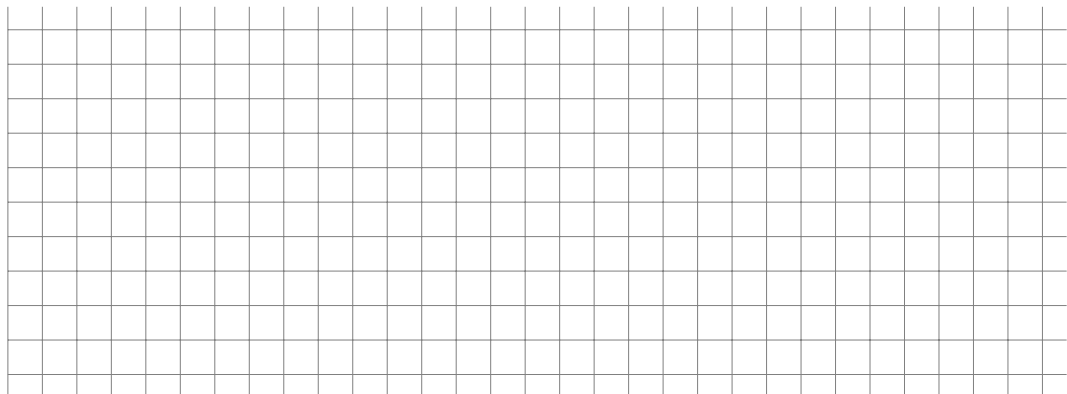


Exercise 17, solution

Exercise 18

Soient $m \geq 2$, A une matrice de taille $m \times (m - 1)$ et $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$ un vecteur non nul. Alors l'ensemble des solutions de $A\vec{x} = \vec{b}$ peut être

- ☐ l'ensemble vide.
- ☐ un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{m-1}$ de dimension 1.
- ☐ un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{m-1}$ de dimension $m - 2$.
- ☐ égal à $\mathbb{R}^{m-1}$.

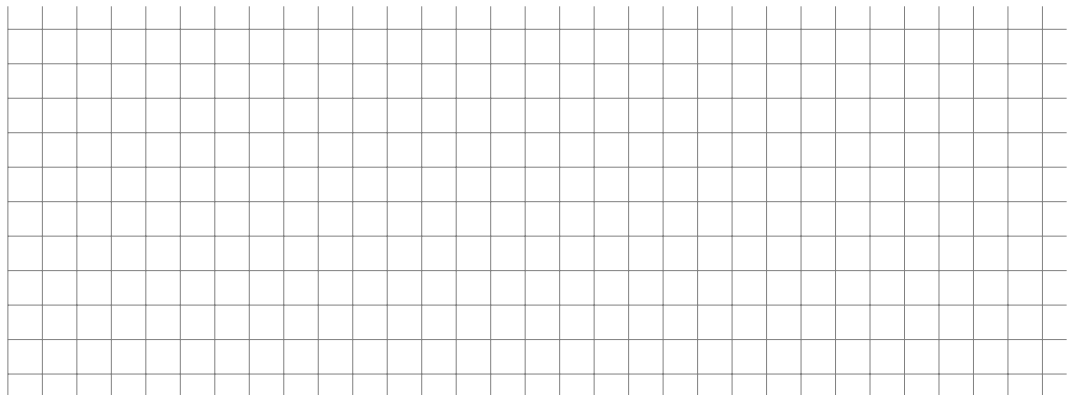


Exercise 18, solution

Exercise 19

Parmi les formules suivantes laquelle est toujours vraie pour tout choix de deux matrices inversibles A et B de taille $n \times n$?

- ☐ $(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$
- ☐ $(A + B^T)^{-1} = A^{-1} + (B^{-1})^T$
- ☐ $(2A)^{-1} = 2^{-n}A^{-1}$
- ☐ $(AB^T)^{-1} = (B^{-1})^T A^{-1}$



Exercise 19, solution

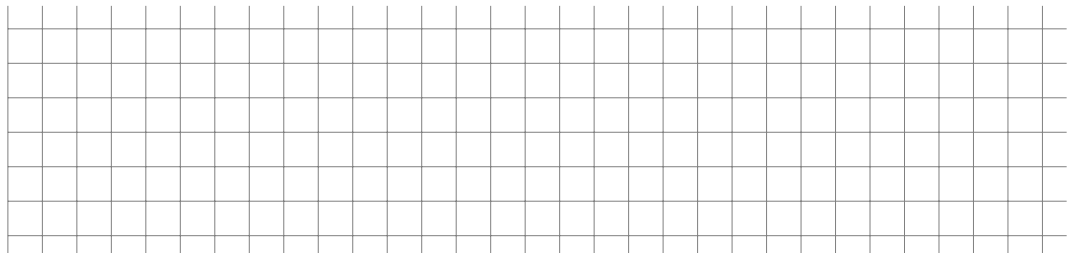
Exercise 20

Soit A la matrice $\begin{pmatrix} -1/2 & 0 & -\sqrt{3}/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sqrt{3}/2 & 0 & -1/2 \end{pmatrix}$. Parmi les affirmations

(a) $\det A = 1$ (b) $AA^T = I_3$ (c) $A^3 = I_3$

lesquelles sont vraies ?

- ☐ seulement (a) et (c)
- ☐ seulement (b)
- ☐ seulement (a) et (b)
- ☐ (a), (b) et (c)

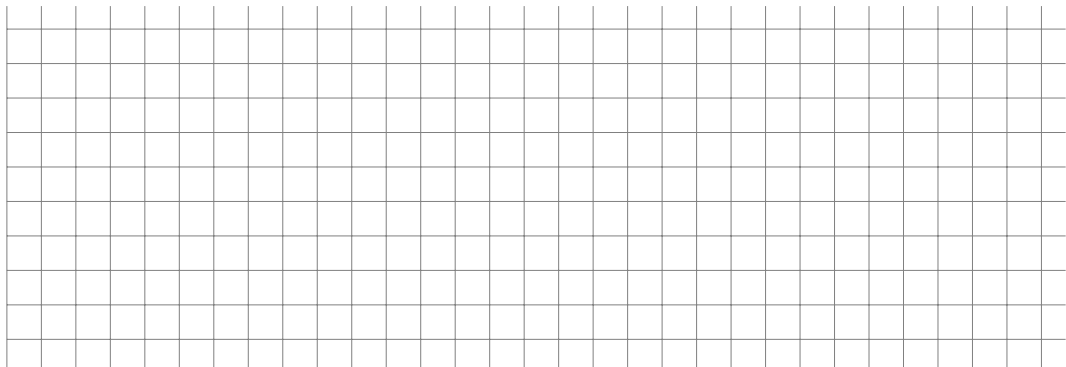


Exercise 20, solution

Exercise 21

Soient a, b deux nombres réels tels que $a + b = 1$ et $A = \begin{pmatrix} 4a & 2 \\ 2 & 4b \end{pmatrix}$ une matrice non inversible. Laquelle des affirmations suivantes doit être vraie ?

- ☐ le polynôme caractéristique de A a une seule racine réelle
- ☐ $\det A = -4$
- ☐ A est une matrice de changement de base
- ☐ le polynôme caractéristique de A a deux racines réelles distinctes

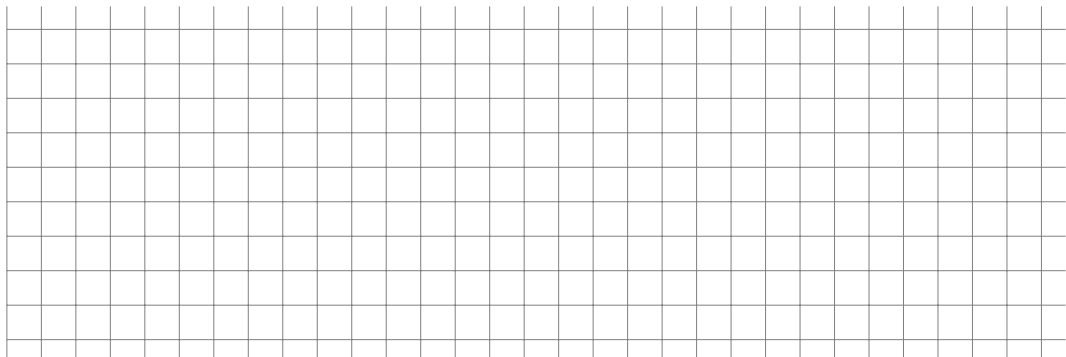


Exercise 21, solution

Exercise 22

Soit U une matrice de taille $n \times p$ dont les colonnes sont orthonormées et soit $W = \text{Col}(U)$. Soit proj_W la projection orthogonale sur W . Alors, pour tout vecteur $\vec{x} \in \mathbb{R}^p$ et tout vecteur $\vec{y} \in \mathbb{R}^n$, on a

- ☐ $U^T U \vec{x} = \vec{x}$ et $U U^T \vec{y} = \vec{0}$.
- ☐ $U^T U \vec{x} = \text{proj}_W \vec{x}$ et $U U^T \vec{y} = \text{proj}_W \vec{y}$.
- ☐ $U^T U \vec{x} = \vec{x}$ et $U U^T \vec{y} = \vec{y}$.
- ☐ $U^T U \vec{x} = \vec{x}$ et $U U^T \vec{y} = \text{proj}_W \vec{y}$.



Exercise 22, solution

Exercise 23

Soient les sous-ensembles de $\mathbb{R}^2$ suivants :

(a) $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

(b) $\left\{ \begin{pmatrix} a \\ \sin a \end{pmatrix} \text{ tels que } a \in \mathbb{R} \right\}$

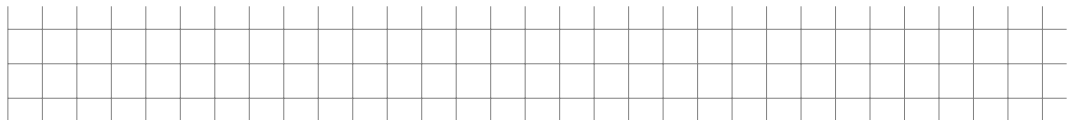
(c) $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ a \end{pmatrix} \text{ tels que } a \in \mathbb{R} \right\}$

(d) $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ a^2 \end{pmatrix} \text{ tels que } a \in \mathbb{R} \right\}$

(e) $\left\{ \begin{pmatrix} -a/2 \\ -10a \end{pmatrix} \text{ tels que } a \in \mathbb{R} \right\}$

Lesquels sont des sous-espaces vectoriels ?

- ☐ tous sauf (d)
- ☐ tous sauf (b)
- ☐ seulement (c) et (e)
- ☐ seulement (a), (c) et (e)

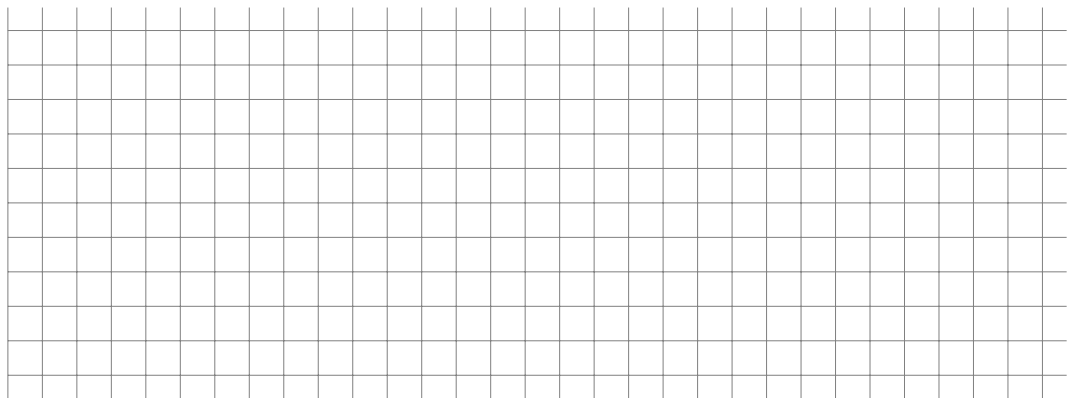


Exercise 23, solution

Exercise 24

Soient A et B deux matrices de taille $n \times n$ semblables. Quel énoncé n'est pas nécessairement vrai ?

- ☐ Les polynômes caractéristiques de A et de B sont les mêmes.
- ☐ A est diagonalisable si et seulement si B est diagonalisable.
- ☐ Les rangs de A et de B sont les mêmes.
- ☐ A et B ont les mêmes sous-espaces propres.



Exercise 24, solution

Question 1

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Trouvez une base de $\text{Col}(A)$, de $\ker(A)$ et de $\text{Lgn}(A)$.

Question

Calculer une SVD de la matrice suivante

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Question

Calculer une SVD de la matrice suivante

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Question

Calculer une SVD de la matrice suivante

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Merci beaucoup pour le semestre et bonnes fêtes !!