Algèbre linéaire
Chapitre 10 : Matrices orthogonales, matrices symétriques

Simone Deparis

EPFL Lausanne – MATH

Semaine 13

À savoir faire :

1. Calculs avec produits scalaires et normes.
2. Déterminer si un ensemble de vecteurs est orthogonal ou orthonormal.
3. Trouver une base orthogonale à partir d'un ensemble génératrice donné en utilisant le procédé de Gram-Schmidt.
4. Trouver l'orthogonal à un sous-espace vectoriel $W \subset \mathbb{R}^n$.
5. Calculer la projection orthogonale d'un vecteur sur un sous-espace vectoriel.
6. Trouver les solutions au sens des moindres carrées d'un système d'équations linéaires.
7. Calculer la droite de régression à partir d'un ensemble de points dans $\mathbb{R}^n$.
8. Calculer la décomposition QR d'une matrice donnée.

10.1 Matrices et transformations orthogonales

Définition

Soient $V = \mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire usuel et A une matrice $n \times n$.
On dit que A est *orthogonale* si $||A\vec{x}|| = ||\vec{x}||$ pour tout $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$.

Soit A $n \times n$ orthogonale. Alors A est inversible.

10.2 Matrices orthogonales, équivalences

Proposition

Soient $V = \mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire usuel et A une matrice $n \times n$.
Alors les conditions suivantes sont équivalentes.

- A est othrogonale.
- $||A\vec{x}|| = ||\vec{x}||$ pour tout $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$.
- $\langle A\vec{x}, A\vec{y}\rangle = \langle \vec{x}, \vec{y}\rangle$ pour tout $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$.
- $AA^T = I_n = A^T A$, i.e. $A^{-1} = A^T$.
- Les lignes de A forment une base orthonormée de V.
- Les colonnes de A (vues comme vecteurs de $\mathbb{R}^n$) forment une base orthonormée de V.

Aussi, si A est orthogonale, alors $\det A = \pm 1$.

10.3 Changement de base orthogonal

Définition

Soit A une matrice $n \times n$. On dit que A est *orthogalement diagonalisable* ou *orthodiagonalisable* s'il existe une matrice orthogonale P telle que $D = P^{-1}AP$ soit diagonale.

Puisque P est orthogonale, $P^{-1} = P^T$ et $A = PDP^{-1} = PDP^T$.

10.4 Matrices symétriques, valeurs propres, vecteurs propres, théorème spectral

Soit A une matrice $n \times n$.

Proposition

Soient A symétrique et $\lambda \neq \mu$ deux valeurs propres distinctes pour A.
Si $u \in E_\lambda$ et $v \in E_\mu$, alors u et v sont orthogonaux.

Proposition

A est orthogonalement diagonalisable $\Leftrightarrow$ A est symétrique.

- Soit A symétrique. Alors il est possible de factoriser $c_A(t)$ en un produit de facteurs linéaires sur $\mathbb{R}$.
- Pour chaque valeur propre $\lambda \in \mathbb{R}$ de A, la dimension de l'espace propre E_λ est égale à la multiplicité algébrique de λ comme racine de $c_A(t)$.

Série 13, Ex 8

Parmis les affirmations suivantes, lequelles sont toujours vraies ?

1. Une matrice diagonalisable est symétrique.
2. Soit A une matrice $n \times n$ telle que $A^T = A$ et soient $u, v \in \mathbb{R}^n$ tels que $Au = 3u$ et $Av = 4v$ alors $u \cdot v = 0$.
3. Une matrice orthogonale est orthodiagonalisable.
4. Soit A une matrice. Alors, AA^T est diagonalisable.
5. Si A est une matrice orthodiagonalisable inversible, alors A^{-1} est aussi orthodiagonalisable.
6. Soit A une matrice symétrique et B une matrice inversible telle que $B^{-1}AB$ est diagonale. Alors B est orthogonale.

Série 13, Ex 8, solution

Série 13, Ex 9

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Trouver une matrice orthogonale P et une matrice diagonale D telle que $P^T AP = D$.

Série 13, Ex 9, solution

Série 13, Ex 10

Soit $A = \begin{pmatrix} 7 & -24 \\ -24 & -7 \end{pmatrix}$. Si $A = PDP^T$ pour une matrice diagonale D, alors P peut s'écrire comme

A. $P = \begin{pmatrix} 4/5 & 3/5 \\ 3/5 & -4/5 \end{pmatrix}$

B. $P = \begin{pmatrix} 3/5 & 4/5 \\ 4/5 & -3/5 \end{pmatrix}$

C. $P = \begin{pmatrix} 5/13 & 12/13 \\ 12/13 & -5/13 \end{pmatrix}$

D. $P = \begin{pmatrix} 12/13 & 5/13 \\ 5/13 & -12/13 \end{pmatrix}$

Série 13, Ex 10, solution

Devoirs pour jeudi :

- MOOC 10.0-10.5 : Regarder les vidéos et faire les petits quiz après les vidéos.

Algèbre linéaire
Chapitre 10 : Matrices orthogonales, matrices symétriques

Simone Deparis

EPFL Lausanne – MATH

Semaine 13

10.5 Méthode : diagonalisation d'une matrice symétrique par une matrice orthogonale

Soit A une matrice $n \times n$ symétrique.

- Déterminer le polynôme caractéristique $c_A(x)$ de A.
- Trouver toutes les racines $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{R}$ distinctes de $c_A(x)$ telles que

$$c_A(x) = (-1)^n (x - \lambda_1)^{m_1} \cdots (x - \lambda_r)^{m_r}.$$

- Pour chaque $1 \leq i \leq r$, déterminer une base $\mathscr{B}_i$ de E_{λ_i}.
- Pour chaque $1 \leq i \leq r$, utiliser le procédé de Gram-Schmidt afin de trouver une base *orthonormée* $\mathscr{B}_i'$ de E_{λ_i}.
- La base $\mathscr{B}' = \mathscr{B}_1' \cup \ldots \cup \mathscr{B}_r'$ est une base orthonormée de $V = \mathbb{R}^n$.
- La matrice P dont les colonnes sont les vecteurs de la base $\mathscr{B}'$ est orthogonale et $P^T A P$ est diagonale.

Décomposition spectrale

Exercice :

Soit A une matrice symétrique de taille $n \times n$. Alors il existe un ensemble de vecteurs propres de A orthonormée $\{u_1, \ldots, u_n\}$ avec comme valeurs propres réels $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tel que

$$A = \lambda u_1 u_1^T + \cdots + \lambda_n u_n u_n^T.$$

Série 13, Ex 11

Calculer la décomposition spectrale de la matrice $A = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

Série 13, Ex 11, solution

Série 13, Ex 12

Parmis les affirmations suivantes, lequelles sont toujours vraies ?

1. Soit A une matrice $n \times m$. Alors $A^T A$ est inversible si et seulement si les colonnes de A sont linéairement indépendantes.
2. Une matrice A est symétrique si et seulement si A^2 est symétrique.

Série 13, Ex 12, solution

Orthodiagolaser

Orthodiagonaliser les matrices de l'excercice 1.b) de la série 13

Devoirs pour mardi :

- MOOC 10.10-10.14 : Regarder les vidéos et faire les petits quiz après les vidéos.
- MOOC Faire quelques exercices.