

Algèbre linéaire

Chapitre 9 : Produits scalaires et espaces euclidiens

Simone Deparis

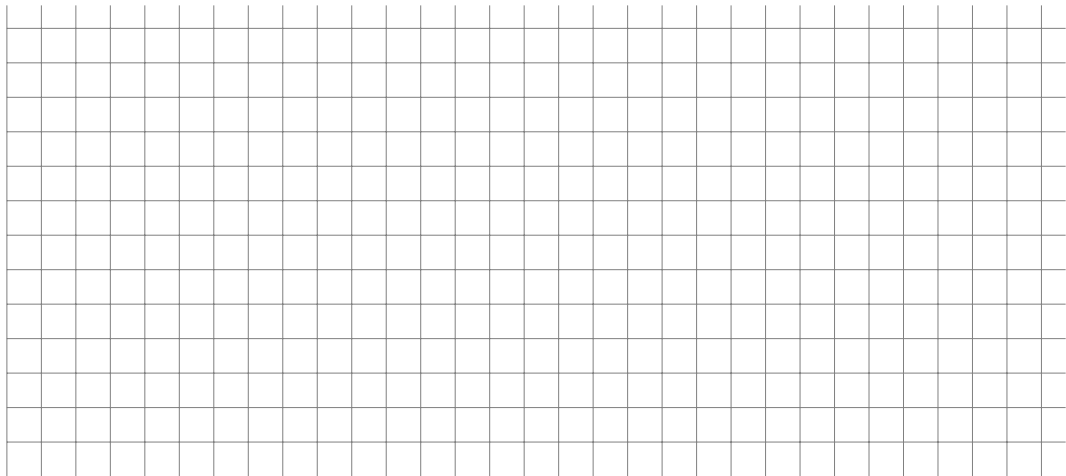
EPFL Lausanne – MATH

Semaine 12



Série 12, Ex 11

Soient $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$. Soit $W = \text{Vect}\{u_1, u_2\}$. Calculer la décomposition $v = z + p_W(v)$, où $z \in W^\perp$.



Série 12, Ex 11, solution

Série 12, Ex 12

Soient $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ 0 \\ -18 \end{pmatrix}$ et $W = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$.

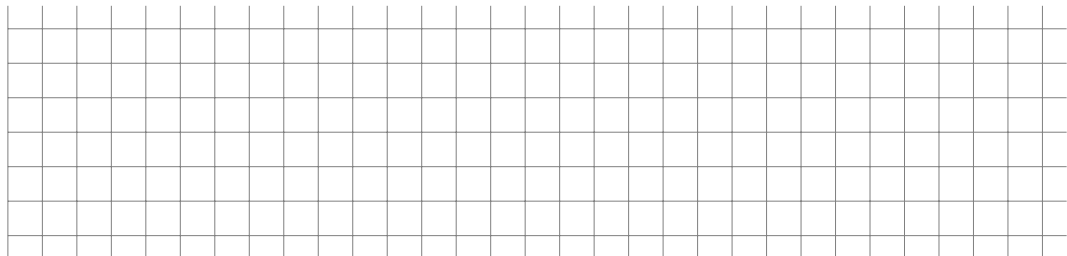
Alors, le projeté orthogonal (par rapport au produit scalaire euclidien) de v sur W est

[A.] $\begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$

[B.] $\begin{pmatrix} -12 \\ 12 \\ -6 \\ -6 \end{pmatrix}$

[C.] $\begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ 0 \\ -14 \end{pmatrix}$

[D.] $\begin{pmatrix} -8 \\ 8 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$



Série 12, Ex 12, solution

9.12 Solution au sens des moindres carrés

Définition

Soient $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$, $b \in M_{m \times 1}(\mathbb{R})$ et $X = (x_1, \dots, x_n)^T$. Aussi, désignons par $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ l'application linéaire associée à A . Une solution du système $AX = b$ au sens des moindres carrés est une solution du système

$$AX = \text{proj}_{\text{im}(\phi)} b.$$

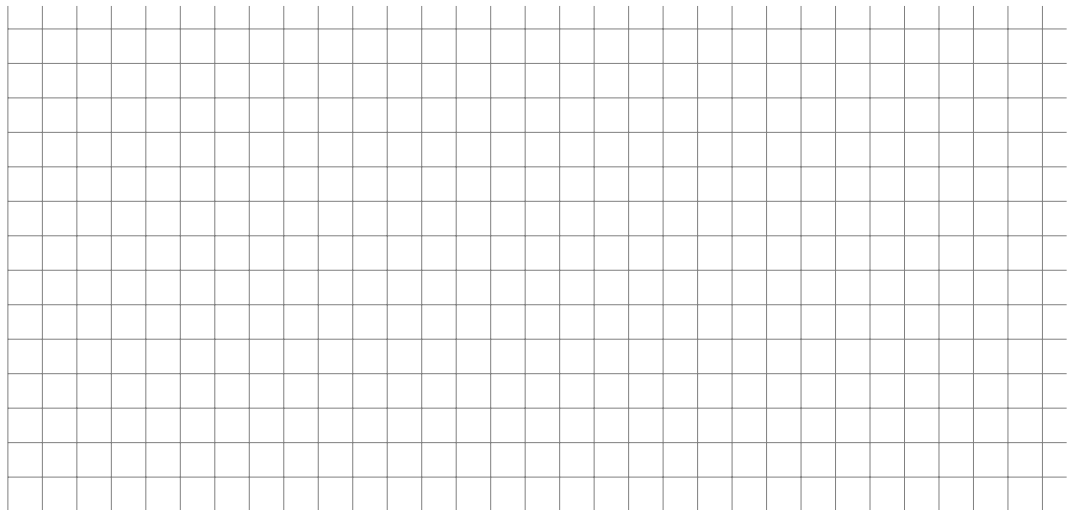
Théorème

Soient $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$, $b \in M_{m \times 1}(\mathbb{R})$ et $X = (x_1, \dots, x_n)^T$. Alors une solution du système $AX = b$ au sens des moindres carrés est une solution du système $A^T AX = A^T b$.

Série 12, Ex 13

Calculer la droite qui approxime le mieux au sens des moindres carrés les points $(-1, 3)$, $(1, 0)$, $(0, 3)$.

Par où passe cette droite en $x = -1, 1$ et 0 ?



Série 12, Ex 13, solution

Série 12, Ex 14

Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 5 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$ et $b = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$. Alors la solution au sens des moindres

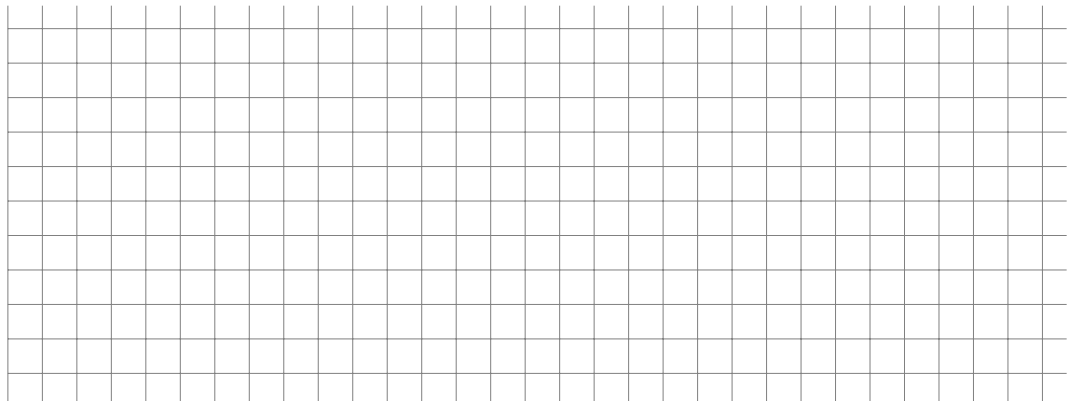
carrés $\hat{x} = \begin{pmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{pmatrix}$ de l'équation $Ax = b$ satisfait

[A.] $\hat{x}_2 = 1/6$

[B.] $\hat{x}_2 = -35/6$

[C.] $\hat{x}_2 = 41/6$

[D.] $\hat{x}_2 = -5/6$

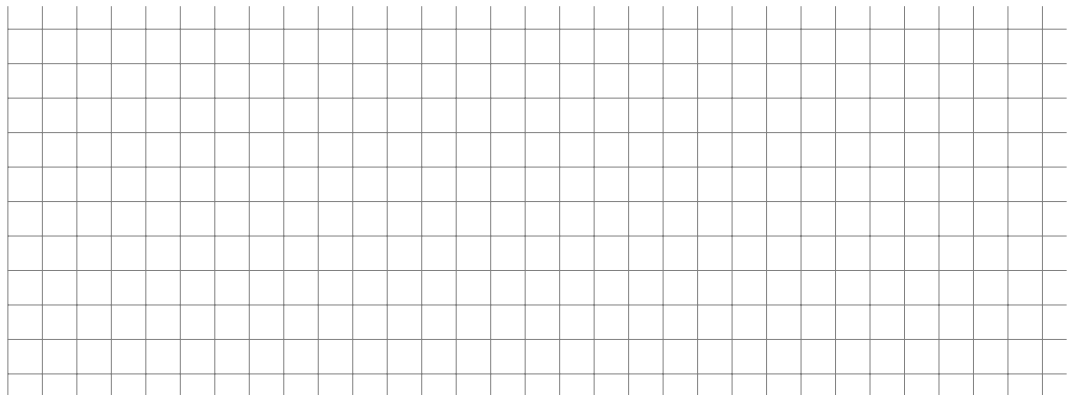


Série 12, Ex 14, solution

Série 12, Ex 15

Quelle affirmation est vraie pour toute matrice A de taille $n \times n$ et tout vecteur $b \in \mathbb{R}^n$?

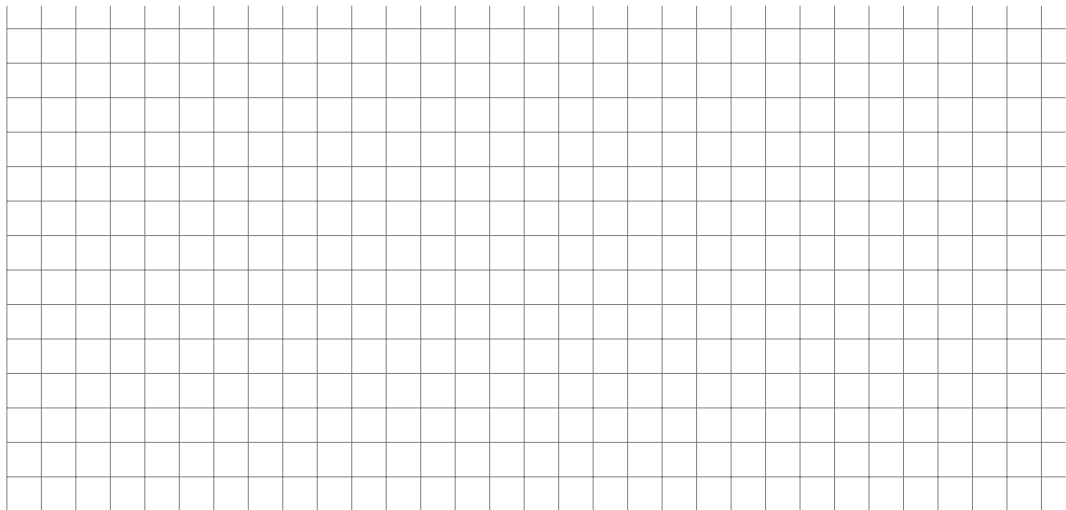
- A. L'équation $Ax = b$ a au plus une solution
- B. L'équation $Ax = b$ a au plus une solution au sens des moindres carrés
- C. L'équation $Ax = b$ a au moins une solution.
- D. L'équation $Ax = b$ a au moins une solution au sens des moindres carrés.



Série 12, Ex 15, solution

Série 12, Ex 16

Soit $u_1, \dots, u_p$ une base orthonormée d'un sous-espace $W \subset \mathbb{R}^n$ et $y \in \mathbb{R}^n$ et soit U la matrice $n \times p$ dont les colonnes sont les vecteurs $u_1, \dots, u_p$. Montrer que $p_W(y) = UU^T y$.



Série 12, Ex 16, solution

9.13 La factorisation QR : définition

Définition

Soit $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ une matrice dont les colonnes sont linéairement indépendantes. Alors il existe une factorisation du type $A = QR$, où

- Q est une matrice $m \times n$ dont les colonnes forment une base orthonormée de l'espace colonnes de A
- R est une matrice $n \times n$ triangulaire supérieure, inversible, dont les coefficients diagonaux sont strictement positifs.

9.13 La factorisation QR : construction par Gram-Schmidt

Soit A une matrice $m \times n$ avec colonnes $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ linéairement indépendante.

Procédé de Gram-Schmidt

$$\vec{v}_1 = \vec{a}_1,$$

$$\vec{v}_2 = \vec{a}_2 - (\vec{w}_1 \cdot \vec{a}_2) \vec{w}_1,$$

$$\vec{v}_3 = \vec{a}_3 - (\vec{w}_1 \cdot \vec{a}_3) \vec{w}_1 - (\vec{w}_2 \cdot \vec{a}_3) \vec{w}_2,$$

$$\vdots$$

$$\vec{v}_n = \vec{a}_n - \dots - (\vec{w}_{n-1} \cdot \vec{a}_n) \vec{w}_{n-1},$$

Normalisation

$$\vec{w}_1 = \vec{v}_1 / \|\vec{v}_1\|$$

$$\vec{w}_2 = \vec{v}_2 / \|\vec{v}_2\|$$

$$\vec{w}_3 = \vec{v}_3 / \|\vec{v}_3\|$$

$$\vec{w}_n = \vec{v}_n / \|\vec{v}_n\|$$

$$Q = (\vec{w}_1 \cdots \vec{w}_n) \quad R = \begin{pmatrix} \|\vec{v}_1\| & \vec{w}_1 \cdot \vec{a}_2 & \cdots & \vec{w}_1 \cdot \vec{a}_n \\ 0 & \|\vec{v}_2\| & \vec{w}_2 \cdot \vec{a}_3 & \cdots \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots \\ 0 & \cdots & 0 & \|\vec{v}_n\| \end{pmatrix}$$

9.14 La factorisation QR : application à la résolution d'un système au sens des moindres carrés

Soit $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ une matrice dont les colonnes sont linéairement indépendantes et soit $A = QR$ une factorisation QR de A .

Proposition

$$QQ^T \vec{b} = \text{proj}_{\text{Col}(A)} \vec{b} \quad \text{pour tout } \vec{b} \in \mathbb{R}^n.$$

Proposition

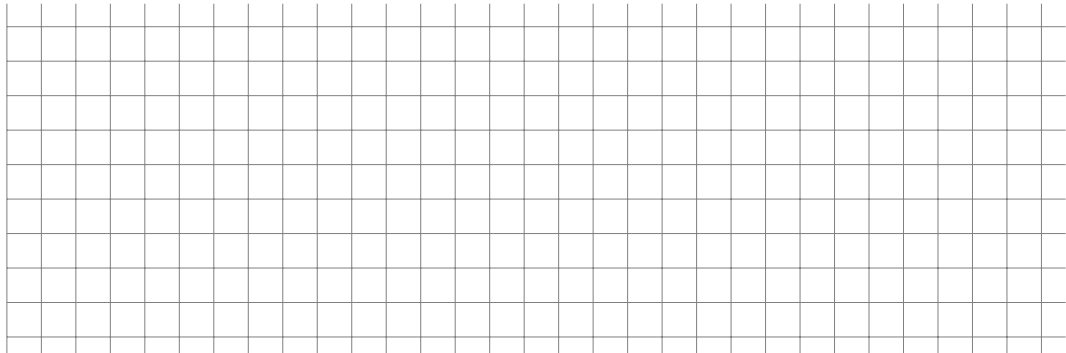
Pour tout $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$, l'équation $A\vec{x} = \vec{b}$ admet une unique solution au sens des moindres carrés, donnée par la formule

$$\hat{x} = R^{-1}Q^T \vec{b}.$$

Série 12, Ex 17

Soient A une matrice de taille $m \times n$ et $b \in \mathbb{R}^m$. Soit $c = \text{proj}_{\text{Col}(A)}(b)$. Alors, il est toujours vrai que

- A. la solution au sens des moindres carrés de l'équation $Ax = b$ est $A^{-1}c$.
- B. l'équation $Ax = b$ n'admet aucune solution
- C. toute solution de $Ax = c$ est une solution au sens des moindres carrés de $Ax = b$
- D. l'équation $Ax = c$ possède une solution unique.

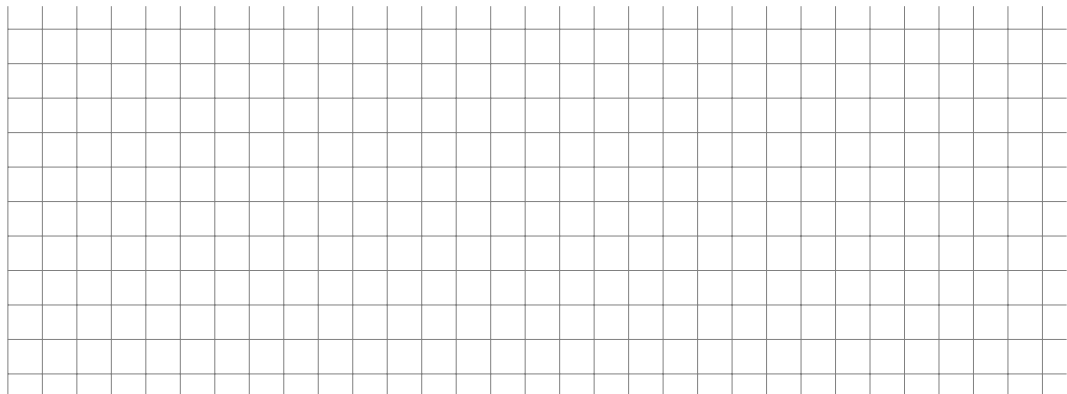


Série 12, Ex 17, solution

Série 12, Ex 18

Quelle équation correspond à la droite de régression par les points $(0, 1), (1, 1), (2, 2), (3, 2)$?

- A. $y = 0.9 + 0.4x$
- B. $y = 1 + 0.5x$
- C. $y = 18 + 4x$
- D. $y = 1.1 + 0.6x$

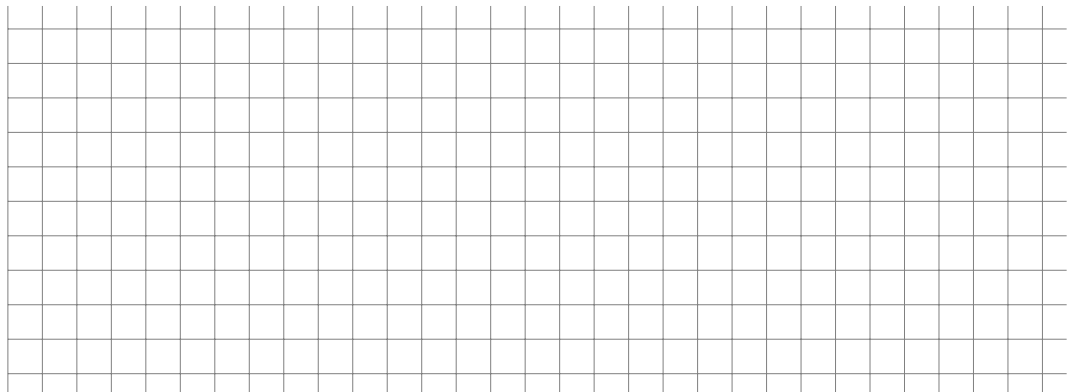


Série 12, Ex 18, solution

Série 12, Ex 19

Soit U une matrice de taille $n \times p$ dont les colonnes sont orthonormées et soit $W = \text{Col}(U)$. Alors, pour tout vecteur $x \in \mathbb{R}^p$ et tout vecteur $y \in \mathbb{R}^n$, on a

- A. $U^T U x = \text{proj}_W(x)$ et $U U^T y = \text{proj}_W(y)$
- B. $U^T U x = x$ et $U U^T y = 0$
- C. $U^T U x = x$ et $U U^T y = y$
- D. $U^T U x = x$ et $U U^T y = \text{proj}_W(y)$.



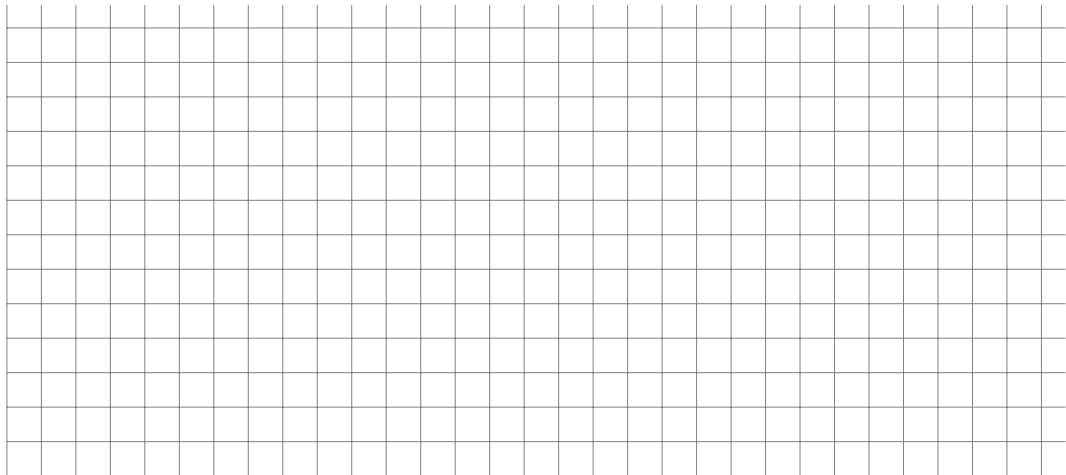
Série 12, Ex 19, solution

Série 12, Ex 20

Soit A une matrice dont les colonnes sont linéairement indépendantes, et soit $A = QR$ sa factorisation QR. Alors R est une matrice inversible.

A. Vrai

B. Faux

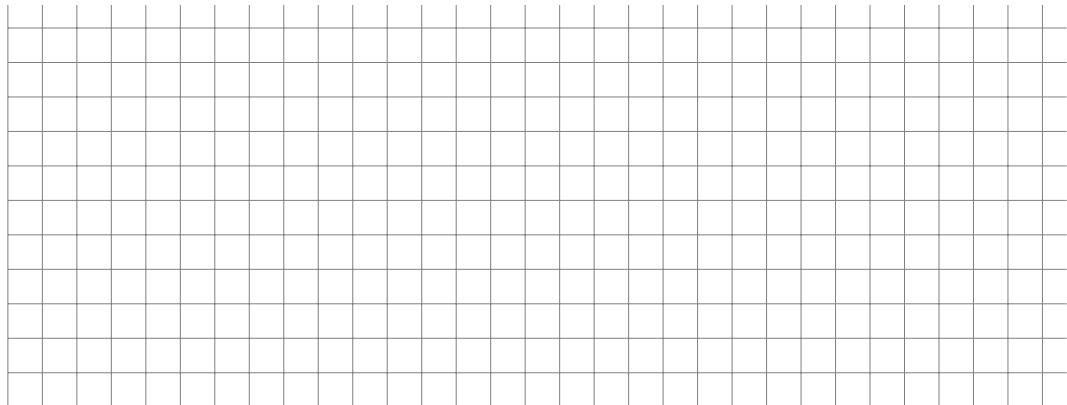


Série 12, Ex 20, solution

Série 12, Ex 21

Calculer une factorisation QR de la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$



Série 12, Ex 21, solution

Série 12, Ex 22

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 6 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -6 \end{pmatrix}.$$

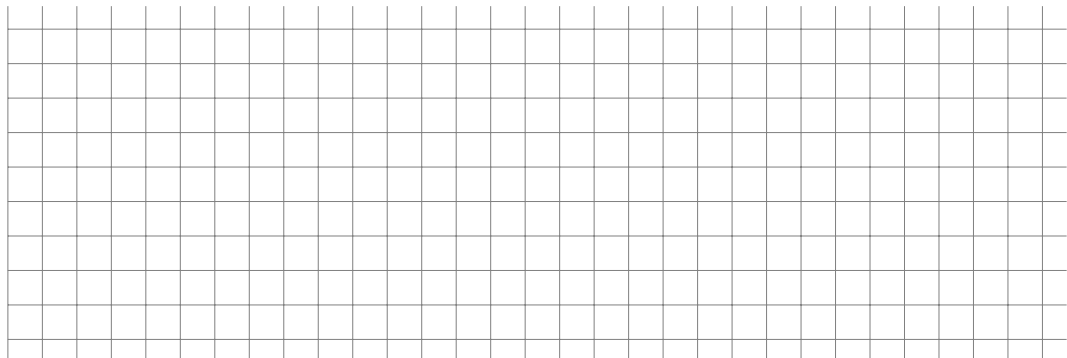
Soit $A = QR$ la décomposition QR de A . Alors

[A.] $r_{33} = 2\sqrt{2}$

[B.] $r_{33} = \sqrt{2}$

[C.] $r_{33} = \sqrt{3}$

[D.] $r_{33} = 3\sqrt{2}$

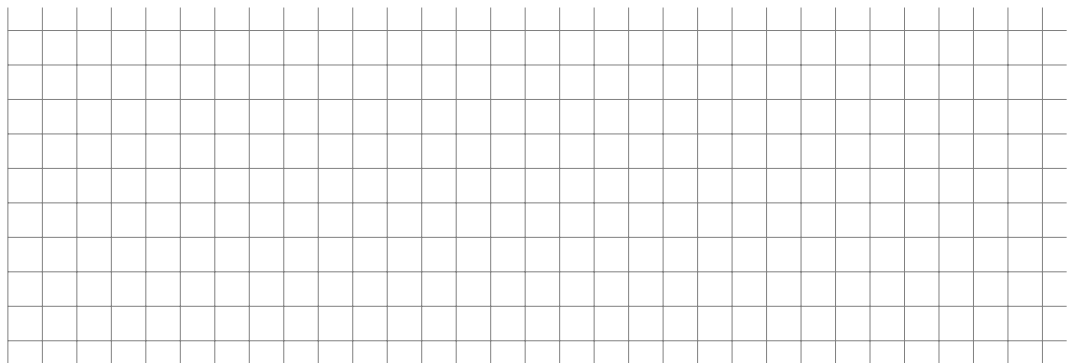


Série 12, Ex 22, solution

Série 12, Ex 23

Soient A une matrice non-nulle de taille $m \times n$ et $b \in \mathbb{R}^m$. Alors, il est toujours vrai que

- A. le vecteur $b - Ax$ appartient à $\ker(A^T)$ pour un unique choix de $x \in \mathbb{R}^n$.
- B. la matrice $A^T A$ est inversible.
- C. l'équation $Ax = b$ admet une unique solution au sens des moindres carrés.
- D. si $\hat{x}$ et $\hat{x}'$ sont deux solutions au sens des moindres carrés de $Ax = b$, alors $A\hat{x} = A\hat{x}'$



Série 12, Ex 23, solution

Chapitre 9 : Produits scalaires et espaces euclidiens

À savoir faire :

- 1 Calculs avec produits scalaires et normes.
- 2 Déterminer si un ensemble de vecteurs est orthogonal ou orthonormal.
- 3 Trouver une base orthogonale à partir d'un ensemble génératrice donné en utilisant le procédé de Gram-Schmidt.
- 4 Trouver l'orthogonal à un sous-espace vectoriel $W \subset \mathbb{R}^n$.
- 5 Calculer la projection orthogonale d'un vecteur sur un sous-espace vectoriel.
- 6 Trouver les solutions au sens des moindres carrées d'un système d'équations linéaires.
- 7 Calculer la droite de régression à partir d'un ensemble de points dans $\mathbb{R}^n$.
- 8 Calculer la décomposition QR d'une matrice donnée.

Devoirs pour jeudi :

Jeudi pas de cours, faites le rendu individuel a 14h15. La séance d'exercices se tient comme d'habitude.