

Algèbre linéaire

Chapitre 9 : Valeurs et vecteurs propres

Simone Deparis

EPFL Lausanne – MATH

Semaine 9



8.1 Valeurs propres et vecteurs propres, définitions, exemples

$$A \in M_{n \times n}(\mathbb{R}).$$

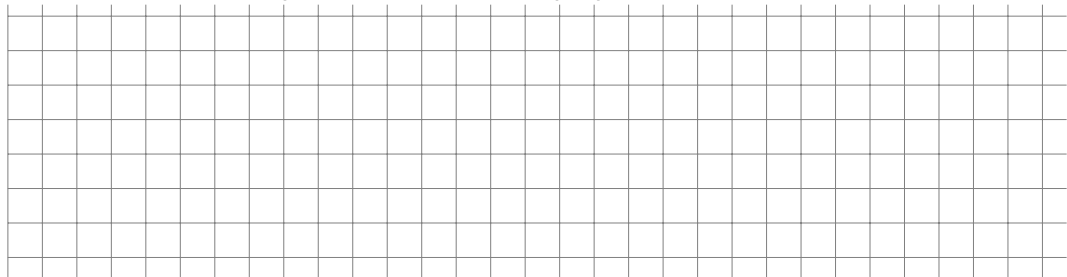
Définition

$\lambda \in \mathbb{R}$ est une *valeur propre* de A s'il existe $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ non-nul tel que $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$.

Si $\lambda \in \mathbb{R}$ est une valeur propre de A , alors toute solution non-nulle de $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$ s'appelle un *vecteur propre* de A correspondant à la *valeur propre* λ .

Attention !

- Le vecteur nul ne peut pas être un vecteur propre par définition.
- Le nombre zéro peut être une valeur propre.

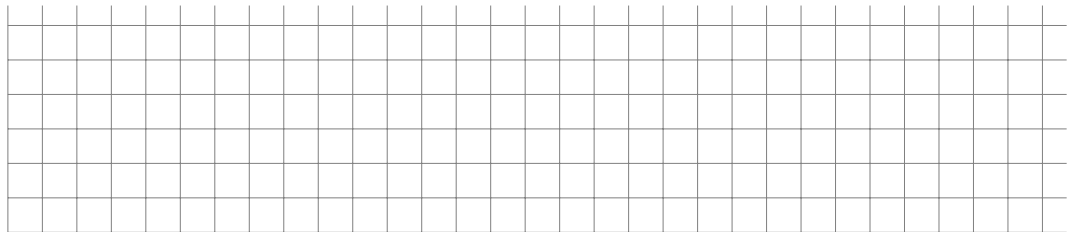


8.2 Valeurs propres : transformations linéaires et matrice associée

Proposition

Soient $\dim V < \infty$, $T : V \rightarrow V$ une transformation linéaire et $A = [T]_{\mathcal{B}}$ la matrice de T par rapport à une base $\mathcal{B}$ de V .

$\lambda \in \mathbb{R}$ est une valeur propre de T si et seulement si $\lambda \in \mathbb{R}$ est une valeur propre de A .



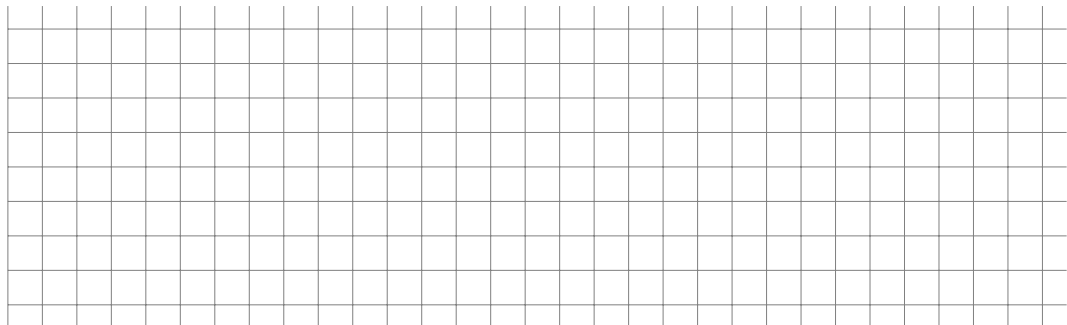
8.2 Valeurs propres : comment les trouver

Série 9, Ex 1, D

On considère la matrice $A_\lambda = \begin{pmatrix} -1-\lambda & 5 & 2 \\ 5 & -1-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & 2-\lambda \end{pmatrix}$. Alors le

déterminant de A_λ est

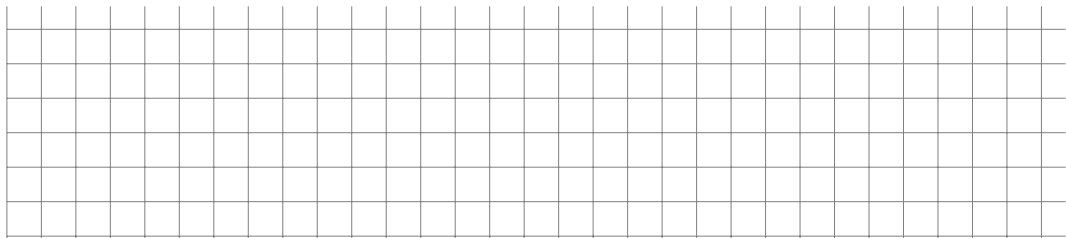
- A. $\lambda^2 - 5\lambda + 5$
- B. $\lambda^3 + 36\lambda$
- C. $(\lambda - 4)(\lambda - 1)^2$
- D. $-\lambda(\lambda + 6)(\lambda - 6)$.



Série 9, Ex 1, *D*

Soit A_λ la même matrice que dans la question précédente. Pour quelles valeurs de $\lambda \in \mathbb{R}$ est-ce que le système d'équations linéaires $A_\lambda x = 0$ a une infinité de solutions ?

- A. -9
- B. -6
- C. 3
- D. 0
- E. 6
- F. 9
- G. pour encore d'autres valeurs.



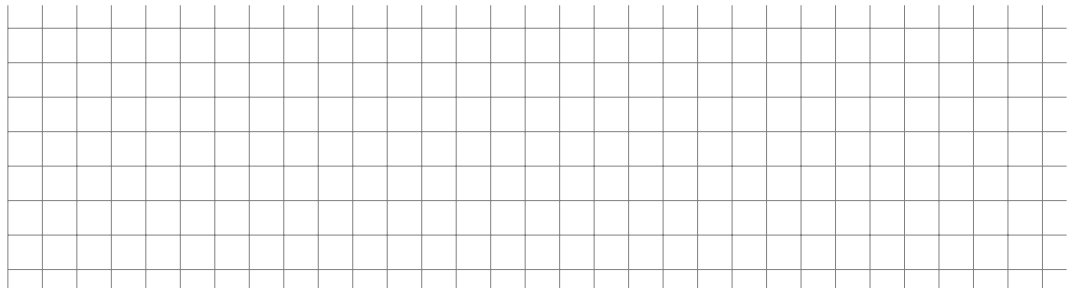
Série 9, Ex 9

Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Alors les valeurs propres de A sont

- ☐ -2 et 7
- ☐ 3 et 4
- ☐ -5, -1 et 1
- ☐ -2 et 3

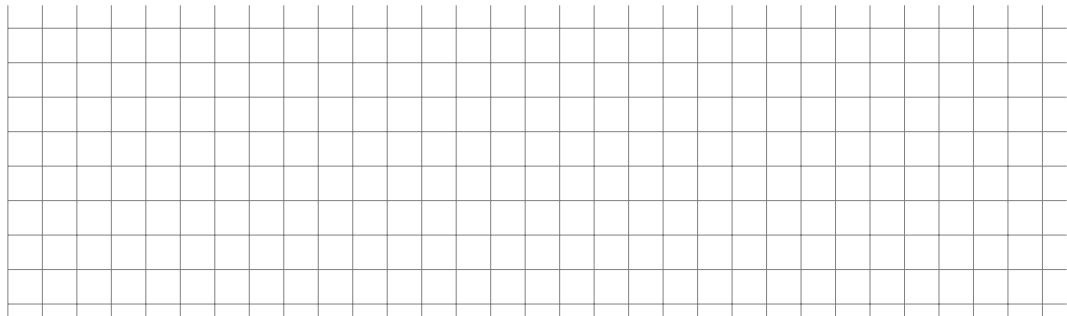


Série 9, Ex 9 , solution

Série 9, Ex 11

Quelles affirmations sont toujours vraies ?

- a Soient A et B deux matrices carrées semblables. Alors A et B ont les mêmes valeurs propres.
- b Soient A et B deux matrices carrées semblables. Alors A et B ont les mêmes vecteurs propres.
- c Soient A et B deux matrices carrées qui ont les mêmes valeurs propres. Alors A et B sont semblables.
- d Soit A une matrice carrée. A et A^T ont les mêmes valeurs propres.



Série 9, Ex 11 , solution

Série 9, Ex 11

Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 10 & 4 & -\ell \\ -4 & c & -2 \end{pmatrix},$$

avec les paramètres $\ell, c \in \mathbb{R}$. Alors, pour tout $\ell \in \mathbb{R}$, -1 est une valeur propre de la matrice A si

- ☐ $c = -2$
- ☐ $c = 8$
- ☐ $c = 1$
- ☐ $c = -1$

(plusieurs réponses correctes).

[illegible]

Série 9, Ex 11 , solution

8.3 Polynôme caractéristique

$$A \in M_{n \times n}(\mathbb{R}).$$

Définition

Le *polynôme caractéristique* de A , noté $c_A(t)$, est le polynôme défini par

$$c_A(t) = \det(A - tI).$$

Proposition

Soit P $n \times n$ inversible. Alors

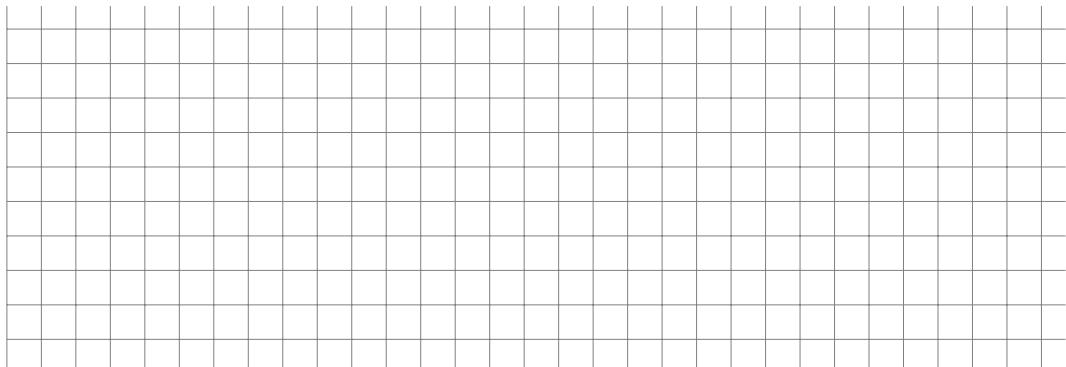
$$c_A(t) = c_{PAP^{-1}}(t).$$

Conséquence : Le polynôme caractéristique est invariable par rapport au changement de base.

Série 9, Ex. 12

Soient a, b deux nombres réels tels que $a + b = 1$ et $A = \begin{pmatrix} 4a & 2 \\ 2 & 4b \end{pmatrix}$ une matrice non-inversible. Laquelle des affirmations suivantes doit être vraie ?

- ☐ $\det(A) = -4$
- ☐ A est une matrice de changement de base
- ☐ le polynôme caractéristique de A a une seule racine réelle
- ☐ le polynôme caractéristique de A a deux racines réelles distinctes



Série 9, Ex. 12, solution

Devoirs pour jeudi :

- Regarder les vidéos 8.6 - 8.8 du MOOC et faire les petits quiz après les vidéos.
- Faire quelques exercices de 8.13.

Série 9, Ex. 13

Quelles affirmations sont toujours vraies ?

- a Une matrice carrée a au moins une valeur propre.
- b Une matrice de taille $n \times n$ a au plus n valeurs propres différentes.
- c Soit A une matrice de taille $n \times n$ et λ une valeur propre de A . Alors la multiplicité algébrique de λ est toujours plus grande ou égale à la multiplicité géométrique de A .
- d Soit A une matrice carrée. Alors A est inversible si et seulement si 0 n'est pas une valeur propre de A .
- e Les valeurs propres de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

sont 3, 1 et 4.



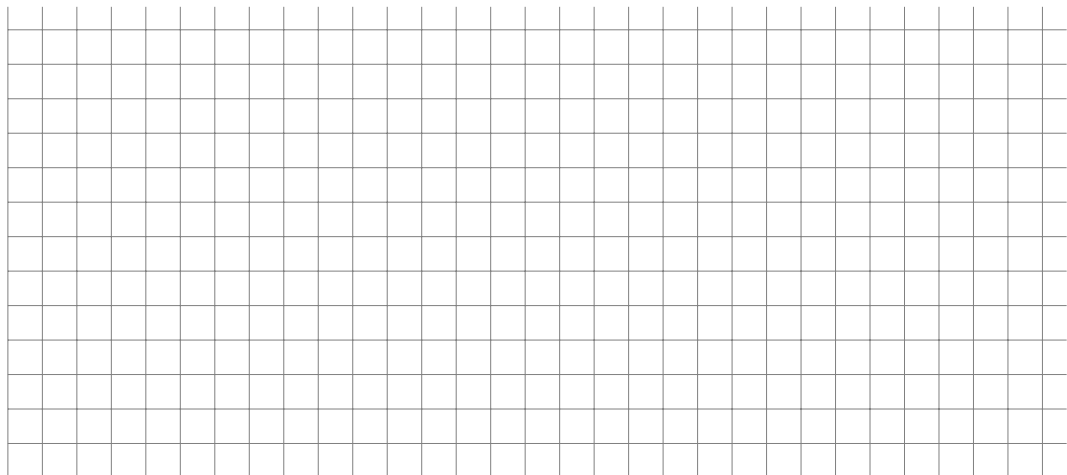
Série 9, Ex. 13, solution

Série 9, Ex. 13

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calculer les vecteurs propres de A par rapport à la valeur propre 3.



8.4 Espaces propres de $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$.

Définition

Si $\lambda \in \mathbb{R}$ est une valeur propre de A . L'espace propre de A associé à λ est le sous-ensemble de $M_{n \times 1}(\mathbb{R})$ défini par

$$E_\lambda = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : A\vec{x} = \lambda\vec{x}\}.$$

Proposition

Le sous-ensemble E_λ est un sous-espace vectoriel.

$$E_\lambda = \{\vec{0}\} \cup \{\text{les vecteurs propres de } A \text{ correspondants à } \lambda\}$$

8.5 Indépendance linéaire, base de vecteurs propres de A $n \times n$

Proposition

Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ des valeurs propres distinctes de A et $v_1, \dots, v_r$ des vecteurs correspondants.

Alors $v_1, \dots, v_r$ sont linéairement indépendants et la somme $E_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus E_{\lambda_r}$ est directe.

Proposition

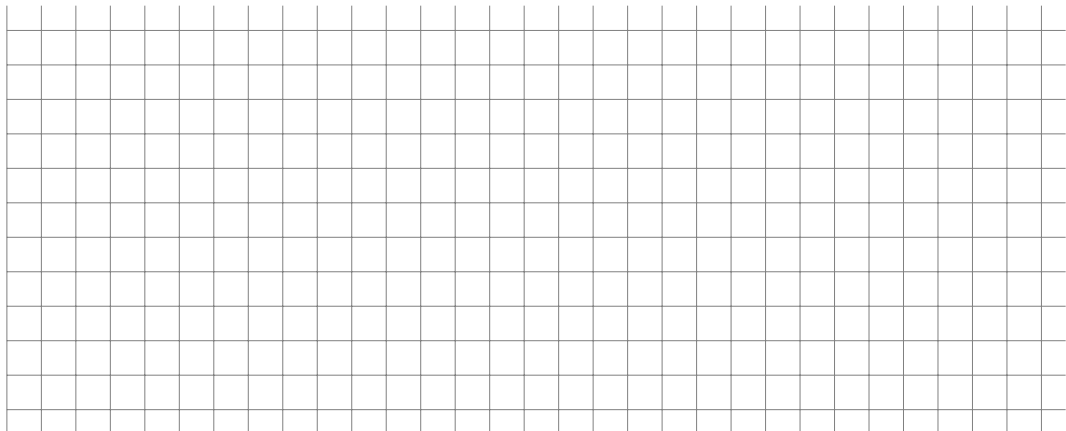
Supposons que A possède n valeurs propres distinctes $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Alors il existe une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^n$ telle que $[T_A]_{\mathcal{B}}$ soit une matrice diagonale.



8.6 Matrices diagonalisables, transformations linéaires diagonalisables

Définition

Une matrice $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ est dite *diagonalisable* s'il existe $P \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ inversible telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale.



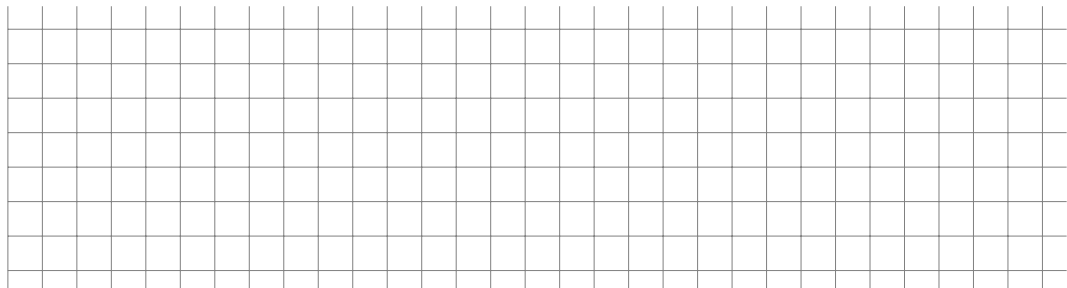
Série 9, Ex 9 : Diagonaliser A

Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Alors les valeurs propres de A sont

- ☐ -2 et 7
- ☐ 3 et 4
- ☐ -5, -1 et 1
- ☐ -2 et 3



Série 9, Ex 9 : Diagonaliser A , solution

8.7 Multiplicité algébrique, multiplicité géométrique de A $n \times n$

Définition

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ une valeur propre de A . Comme toute valeur propre de A est racine de $c_A(t)$, on peut factoriser

$$c_A(t) = (t - \lambda)^m p(t), \text{ où } p(\lambda) \neq 0 \text{ (i.e. } t - \lambda \text{ ne divise pas } p(t)).$$

L'entier m est appelé la *multiplicité algébrique* de λ .

La dimension du sous-espace E_λ est appelée la *multiplicité géométrique* de λ .

Proposition

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ une valeur propre de A . Alors

- la multiplicité géométrique de λ est supérieure ou égale à 1.
- la multiplicité géométrique de λ est inférieure ou égale à la multiplicité algébrique de λ .

8.8 Critère de diagonalisabilité $A \ n \times n$

Théorème

A est diagonalisable si et seulement s'il existe $a \in \mathbb{R}$, $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{R}$ distincts et $m_1, \dots, m_r \in \mathbb{N}$ tels que

$$c_A(t) = a(t - \lambda_1)^{m_1} \cdots (t - \lambda_r)^{m_r}$$

et $m_i = \dim E_{\lambda_i}$ pour tout $1 \leq i \leq r$.

En d'autres termes : si et seulement si

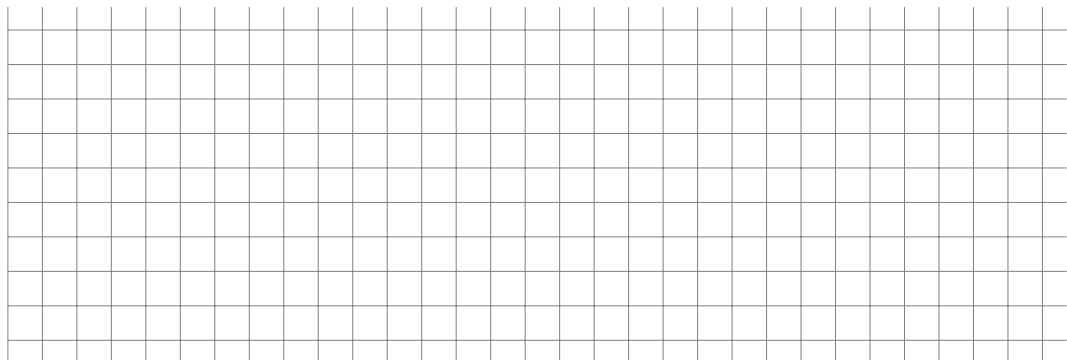
$c_A(t)$ est factorisable en monômes dans $\mathbb{R}$ et les multiplicité géométriques et algébrique respectives coïncident.

Si A est diagonalisable alors $m_1 + \dots + m_r = n$.

Série 9, Ex. 14

Soit A une matrice carrée de taille $n \times n$ et soit P une matrice de taille $n \times n$ telle que chacune des colonnes de P est un vecteur propre de la matrice A . Alors il est toujours vrai que

- ☐ $AP = PD$, où D est une matrice diagonale
- ☐ P est inversible et PAP^{-1} est une matrice diagonale
- ☐ P est inversible et $P^{-1}AP$ est une matrice diagonale
- ☐ $PA = DP$ où D est une matrice diagonale

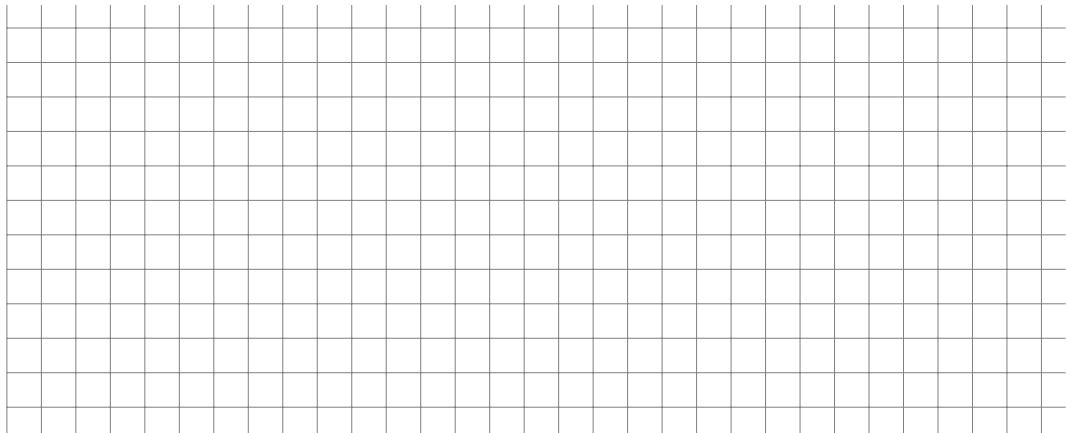


Série 9, Ex. 14, solution

Série 9, Ex. 15

Soit A une matrice de taille $n \times n$ de rang $m < n$. Alors,

- ☐ 0 est valeur propre de A de multiplicité géométrique $n - m$
- ☐ 0 est valeur propre de A de multiplicité algébrique $n - m$
- ☐ 0 est une valeur propre de A de multiplicité algébrique $\geq n - m$
- ☐ 0 n'est pas valeur propre de A



Série 9, Ex. 15, solution

Série 9, Ex. 16

Soit A une matrice de taille 3×3 tel que le polynôme caractéristique de A est $c_A(t) = (2 - t)^3$. Quelles affirmations sont toujours vraies ?

- ☐ A est inversible.
- ☐ A est diagonalisable.
- ☐ $\det(A) \neq 0$.
- ☐ La seule valeur propre de A est 2.
- ☐ Aucune des affirmations ci-dessus n'est vraie.

(plusieurs réponses possibles)

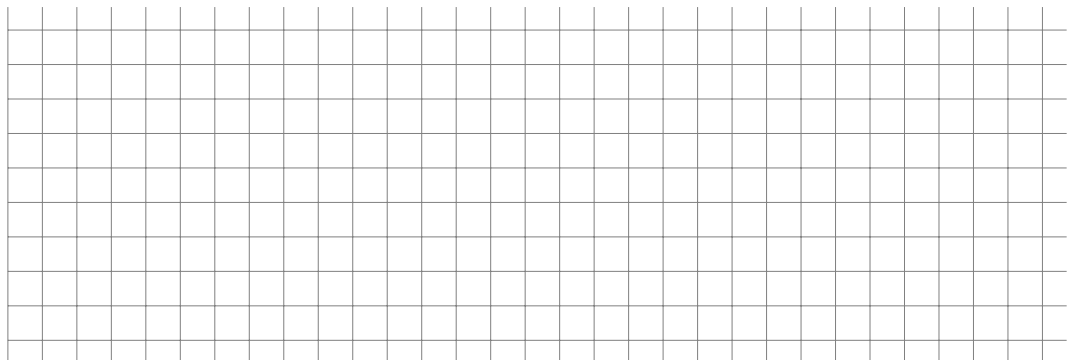
A blank sheet of graph paper with a grid of squares. The grid consists of 20 columns and 10 rows of small squares. There are no margins or additional markings on the page.

Série 9, Ex. 16, solution

Série 9, Ex. 17

Soient A et B deux matrices carrées de même taille. On suppose que B est une matrice inversible. Soit λ une valeur propre de A et aussi de B . Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont toujours vraies ?

- ☐ λ est une valeur propre de la matrice $A + B$
- ☐ λ est une valeur propre de la matrice AB
- ☐ λ est une valeur propre de la matrice BAB^{-1}
- ☐ λ^2 est une valeur propre de la matrice BA .



Série 9, Ex. 17, solution

Devoirs pour mardi :

- MOOC 8.9-9.10 : Regarder les vidéos et faire les petits quiz après les vidéos.
- MOOC 8.13 : faire les exercices en ligne.