Algèbre linéaire
Chapitre 7 : Le déterminant d'une matrice

Simone Deparis

EPFL Lausanne – MATH

Semaine 8

Examen blanc

L'examen blanc aura lieu le jeudi 21 novembre de 15h00 à 16h00 en CE 1515 (salle du cours).

(Le même jour il y aura cours de 14h15 à 14h45 et des séances d'exercices de 16h15 à 18h00).

L'examen blanc ne compte pas pour votre note finale.

Calculs à maîtisier :

1. Calculer la matrice d'une application linéaire par rapport à des bases données.
2. Calculer la matrice de passage entre deux bases données.
3. Extraire d'une matrice donnée une base de l'espace colonne.

Chapitre 7 : Le déterminant d'une matrice

Calculs à maîtisier :

1. Calculer le déterminant d'une matrice.
2. Appliquer les propriétés du déterminant.

7.1 Le déterminant, définitions et exemples

$A = (a_{ij})$ matrice $n \times n$

Définition

Pour $1 \leq i, j \leq n$, on définit $\hat{A}_{ij}$ comme la matrice $(n-1) \times (n-1)$ obtenue en supprimant dans A la i-ème ligne et la j-ème colonne. Le *déterminant* de A est le nombre réel défini récursivement par

$$\det A = a_{11} \det \hat{A}_{11} - a_{12} \det \hat{A}_{12} + \cdots + (-1)^{n+1} a_{1n} \det \hat{A}_{1n},$$

où $\det(a) = a$ pour tout $(a) \in M_{1\times 1}(\mathbb{R})$.

Règle de Sarrus :
Soit $A = (a_{ij})$ 3×3. Alors

$$\det A = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

7.2 Propriétés du déterminant, astuces de calcul

$A = (a_{ij})$ matrice $n \times n$

Proposition

On peut développer le dérminant à partir de n'importe quelle ligne ou colonne en faisant attention aux signes.

Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $1 \leq r, s \leq n$. Alors

- $\det L_{rs}(\lambda)A = \det A.$
- $\det T_{rs}A = -\det A.$
- $\det D_r(\lambda)A = \lambda \det A.$
- $\det AL_{rs}(\lambda) = \det A.$
- $\det AT_{rs} = -\det A.$
- $\det AD_r(\lambda) = \lambda \det A.$

Proposition

Si $A = (a_{ij})$ une matrice triangulaire, alors $$\det A = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

Proposition

$$\det A^T = \det A.$$

Question 1

Calculer le déterminant et l'inverse de

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Calculer le déterminant des matrices suivantes.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} 9 & 8 & 7 \\ 6 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 7 & 1 \\ 0 & 4 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) Même question pour A^T, B^T, C^T, D^T, E^T.

Série 8, Exercice 13 II

$\det(A) =?$, $\det(B) =?$, $\det(C) =?$, $\det(D) =?$, $\det(E) =?$

a. 84

b. 0

c. 4

d. 6

Série 8, Exercice 13 III

Série 8, Exercice 13 IV

Question 2

Soit $r \in \mathbb{R}$. Calculer le déterminant des matrices

$$A = \begin{pmatrix} r & 0 & 0 & 0 & 12 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & r^2 & 1 & 2\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \pi \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} r & 0 & 0 & 0 & 12 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & r^2 & 1 & 2\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 11 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \pi \end{pmatrix}$$

$\det(A)$ est égale à

- A $\frac{4}{3}\pi r^3$
- B $\frac{4}{3}\pi r^2(r-1)$
- C $\frac{4}{3}\pi r^2(r+1)$
- D $\frac{4}{3}\pi r^2$

$\det(B)$ est égale à

- A $\frac{4}{3}\pi r^3$
- B $\frac{4}{3}\pi r^2(r-1)$
- C $\frac{4}{3}\pi r^2(r+1)$
- D $\frac{4}{3}\pi r^2$

A, B matrices $n \times n$.

Proposition

A est inversible si et seulement si $\det A \neq 0$.

Théorème

$$\det(AB) = \det A \det B.$$

Corollaire

Si A est inversible, alors

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}.$$

Corollaire

Soient A et B deux matrices semblables. Alors

$$\det A = \det B.$$

Série 8, Exercice 12++

Soient A et B deux matrices de taille $n \times n$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Indiquer pour chaque énoncé s'il est vrai ou faux et justifier brièvement votre réponse.

- A $\det(A) \neq 0$ si et seulement si $\operatorname{rang}(A) = n$.
- B $\det(A + B) = \det(A) + \det(B)$.
- C Soient V un espace vectoriel de dimension n et $T\colon V \to V$ un endomorphisme. Soient $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ des bases de V. Alors $\det([T]_{\mathcal{B}}) = \det([T]_{\mathcal{C}})$.
- D Si A a deux colonnes identiques, alors $\det(A) = 0$.
- E $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$.
- F AA^T est inversible si et seulement si A est inversible.

Série 8, Exercice 12++, solution

Série 8, Exercice 14

Soit A une matrice $n \times n$. Montrer que si deux lignes de A sont identiques, alors $\det(A) = 0$.
Que peut-on dire si deux colonnes sont identiques ?

Série 8, Exercice 14, solution

Série 8, Exercice 15

Soit A et B deux matrices inversibles de taille $n \times n$. Alors le nombre

$$\det(A^{-1}) \det(A + B) \det(B^{-1})$$

- A est égal à 2.
- B est égal à $\det(B^{-1}) + \det(A^{-1})$,
- C n'est pas défini car la matrice $A + B$ n'est pas forcément inversible.
- D est égal à $\det(B^{-1} + A^{-1})$.

(Une seule réponse correcte.)

Série 8, Exercice 15, solution

Soit A et B deux matrices inversibles de taille $n \times n$. Alors le nombre

$$\frac{\det(A^T) + \det(B^T)}{\det(A)\det(B)}$$

- A est égal à $\det(A^T - A) + \det(B^T - B)$
- B est égal à $\det(B^{-1}) + \det(A^{-1})$
- C est égal à $\det(B^{-1} + A^{-1})$
- D est égal à $\frac{1}{\det(B)} - \frac{1}{\det(A)}$

Série 8, Exercice 16, solution

Série 8, Exercice 17

Le déterminant de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -3 & -3 & -2 \\ -2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ \alpha & 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

est

A. -2

B. $2 - \alpha$

C. $-2 - \alpha$

D. 2

Série 8, Exercice 17, solution

7.5 Le déterminant, interprétation géométrique

Théorème

Soit A 2×2. L'aire du parallélogramme défini par les colonnes de A est égale à $|\det A|$.

Théorème

Soit A 3×3. Le volume du parallélépipède défini par les colonnes de A est égale à $|\det A|$.

Question 3

Soit A une matrice de taille $n \times n$. Quelles conditions sont équivalentes à A étant inversible ?

A. $\det(A) \neq 0$

B. $\det(A) = 0$

C. Il existe une matrice B telle que $AB = I_n$ et $BA = I_n$

D. Il existe une matrice B telle que $AB = I_n$

E. L'équation $Ax = 0$ n'admet que la solution triviale

F. La forme échelonnée de A a n pivots

G. L'application $T_A \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $v \mapsto Av$ est injective

H. L'application $T_A \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $v \mapsto Av$ est surjective

I. $\operatorname{rang}(A) = n$

J. $\ker(A) = \{0\}$

K. A s'écrit comme un produit de matrices élémentaires.

Devoirs pour jeudi :

- Réviser tout le matériel des chapitres 1 - 7 (écrire des exemples, faire quelques exercices, écrire des résumés, poser des questions sur Ed Discussion, regarder des vidéos de 3blue1brown,...)
- On fera un exercice ouvert d'examen et on le corrigera ...
- ... ou quiz de révision de 14h15 à 15h25 car je devrai partir plus tôt.
- ... à la place d'exercice à rendre.

Devoirs pour mardi :

- Regarder les vidéos 8.1 - 8.5 du MOOC et faire les petits quiz après les vidéos.