

Algèbre linéaire

Chapitre 5 : Applications linéaires

Simone Deparis

EPFL Lausanne – MATH

Semaine 6



5.5-5.6 Noyau et image d'une application linéaire

Soit $T : V \rightarrow W$ une application linéaire.

Définition

Le *noyau* de T est le sous-ensemble de V $\ker(T) = \{v \in V : T(v) = 0_W\}$.

L'*image* de T est le sous-ensemble de W $\operatorname{im}(T) = \{T(v) : v \in V\}$.

Proposition

Alors les affirmations suivantes sont vérifiées.

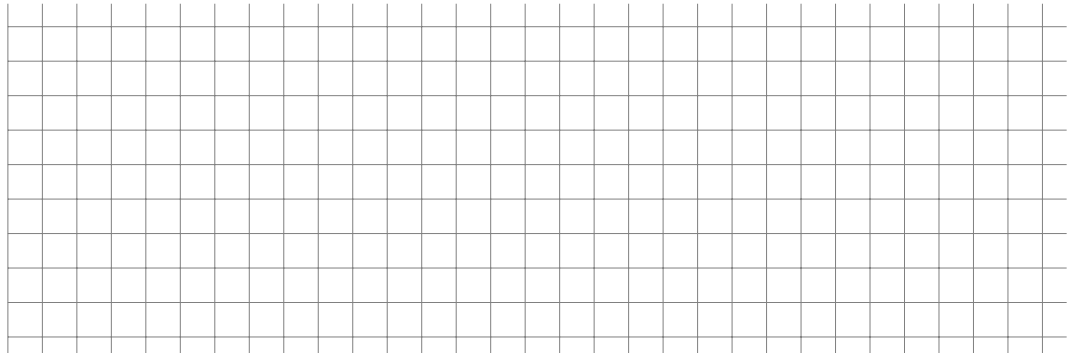
- Le noyau de T est un sous-espace vectoriel de V .
- L'application T est injective si et seulement si $\ker(T) = \{0_V\}$.
- $\operatorname{im}(T)$ est un sous-espace vectoriel de W .

Si $\dim \operatorname{im}(T) < \infty$, alors on appelle l'entier $\dim(\operatorname{im}(T))$ le *rang* de T .

Série 6, Exercice 13

Soit A une matrice $m \times n$ et $T_A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ l'application linéaire définie par $x \mapsto Ax$. Quelles affirmations sont toujours vraies ?

- A. L'image de T_A est l'espace colonne de A .
- B. L'image de T_A est l'espace de tous les $b \in \mathbb{R}^m$ tels que $Ax = b$ est compatible.
- C. Le noyau de T_A est l'espace ligne de A .
- D. Le noyau de T_A est l'espace des solutions de l'équation $Ax = 0$.



Série 6, Exercice 13, solution

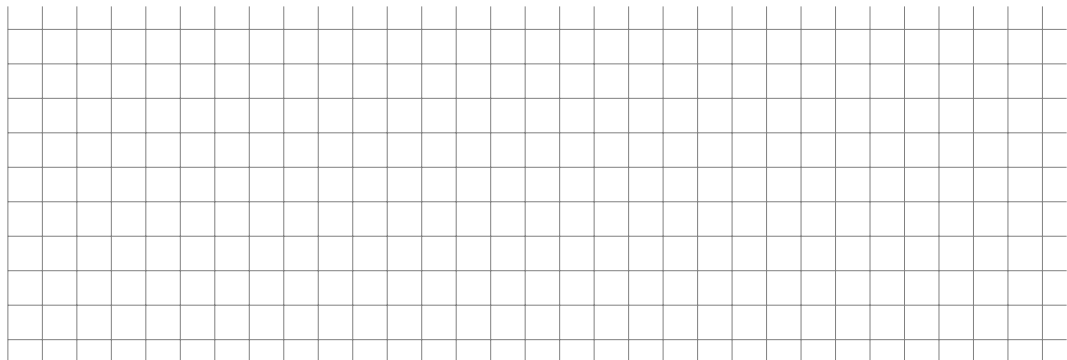
Série 6, Exercice 14

Soit A une matrice de taille $m \times n$ et soit l'application linéaire $\vec{T}_A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ donnée par $\vec{T}_A(\vec{x}) = A\vec{x}$. Remplacer le symbole $?=?$ par le bon opérateur logique $\Rightarrow$, $\Leftarrow$, $\Leftrightarrow$, ou $\neq$

(a) $\vec{T}_A$ est injective $?=?$ A a une position pivot dans chaque colonne.

(b) $\vec{T}_A$ est surjective $?=?$ A a une position pivot dans chaque ligne.

Le montrer et préciser dans chaque cas quelle est la condition nécessaire entre m et n .



Série 6, Exercice 14, solution

5.7-5.8 Le théorème du rang et critère de bijectivité

Théorème

Si $\dim V < \infty$, alors $\dim \operatorname{im}(T) < \infty$ et

$$\dim V = \dim(\ker(T)) + \dim(\operatorname{im}(T)).$$

Corollaire (du théorème du rang)

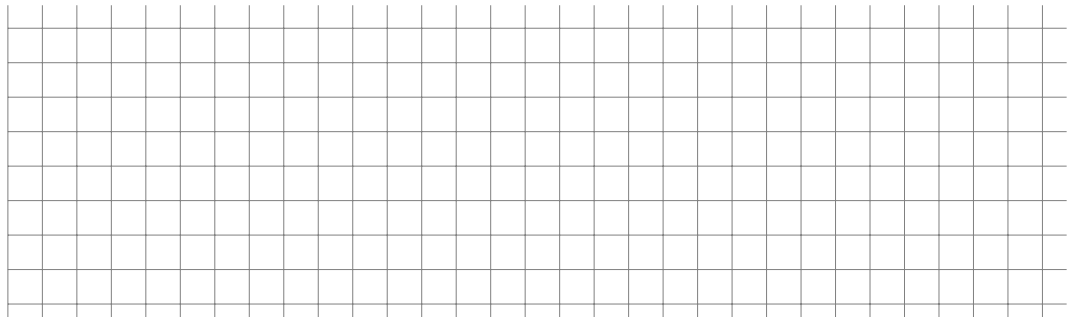
Les affirmations suivantes sont vérifiées.

- Si T est bijective, alors $\dim V = \dim W$.
- Si $\dim V = \dim W$ et T est injective, alors T est bijective.
- Si $\dim V = \dim W$ et T est surjective, alors T est bijective.

Série 6, Exercice 15

Vrai ou faux ?

- A. Soit V un espace vectoriel de dimension 2022 et W un espace vectoriel de dimension 2021. Alors le noyau de toute transformation linéaire surjective $T: V \rightarrow W$ est toujours de dimension 1.
- B. Soit $T: \mathbb{R}^7 \rightarrow \mathbb{P}_6(\mathbb{R})$ une application linéaire injective. Alors T est surjective.
- C. Soit V un espace vectoriel de dimension n et $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ une base ordonnée de V . Alors l'application des coordonnées $[\cdot]_{\mathcal{B}}: V \rightarrow \mathbb{R}^n$ est une application linéaire bijective.



Série 6, Exercice 15, solution

5.9 Opérations avec des applications linéaires

Définition

Soient S et $T : V \rightarrow W$ deux applications linéaires.

On définit $T + S : V \rightarrow W$ par $(T + S)(v) = T(v) + S(v)$ et pour $\lambda \in \mathbb{R}$, on définit également $\lambda T : V \rightarrow W$ par $(\lambda T)(v) = \lambda T(v)$.

Lemme

Les applications définies ci-dessus sont linéaires.

Lemme

Soient U, V, W des $\mathbb{R}$ -espaces vectoriels et $T : U \rightarrow V$, $S : V \rightarrow W$ des applications linéaires.

Alors la composition $S \circ T : U \rightarrow W$ est une application linéaire.

5.10 Applications inversibles

Lemme

Soit $T : V \rightarrow W$ une application linéaire bijective. Alors l'unique application $S : W \rightarrow V$ telle que $T \circ S = id_W$ et $S \circ T = id_V$ est linéaire. On dira que T est une application linéaire inversible avec inverse $S = T^{-1}$.

Série 6, Exercice 17

Soient $T : V \rightarrow W$ une application linéaire de $V = \mathbb{P}_2$ dans $W = \mathbb{P}_1$ et $B = (b_1, b_2, b_3) = (t^2 - t + 1, 2t + 1, 2t - 1)$ et $C = (1, t)$ bases de V et W . Soit T telle que

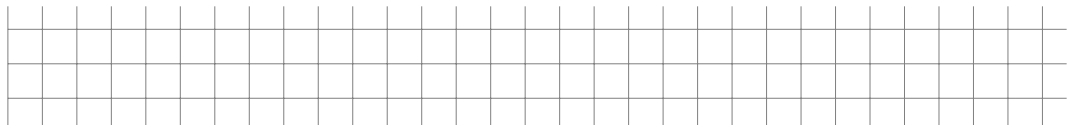
$$T(b_1) = 2t - 1, \quad T(b_2) = 2, \quad T(b_3) = 2$$

Soit $p(t) = t^2$, calculer $T(p)$ ainsi que $[T(p)]_C$.

Quelle est la marche à suivre ?

Mettre dans l'ordre et éliminer les **2 intrus** :

- a. Mettre sous forme échelonnée la matrice augmentée $(B|p)$.
- b. Alors $T(p) = \alpha_1 T(b_1) + \alpha_2 T(b_2) + \alpha_3 T(b_2)$.
- c. Calculer $[p]_B = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ ($\leftarrow$ en colonne).
- d. Compléter la base C en une base de V .
- e. Trouver les coordonnées de $T(p)$ par rapport à C .



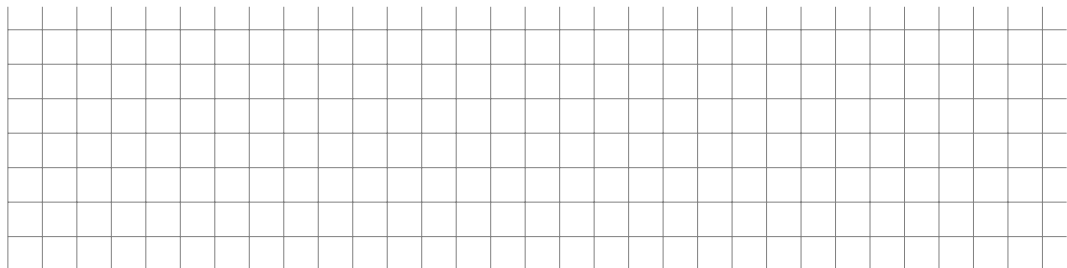
Série 6, Exercice 17, solution

Série 6, Révision, Exercice 5

Considérons le système linéaire

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 4 \\ x_1 + 4x_2 - 8x_3 = 7 \\ -3x_1 - 7x_2 + 9x_3 = -6. \end{cases}$$

- i) Écrire le système sous forme matricielle $A\vec{x} = \vec{b}$.
- ii) Écrire le système comme une combinaison linéaire des colonnes de la matrice A .
- iii) Trouver la solution générale de l'équation $A\vec{x} = \vec{b}$.



Série 6, Révision, Exercice 5, solution

Série 6, Révision, Exercice 6

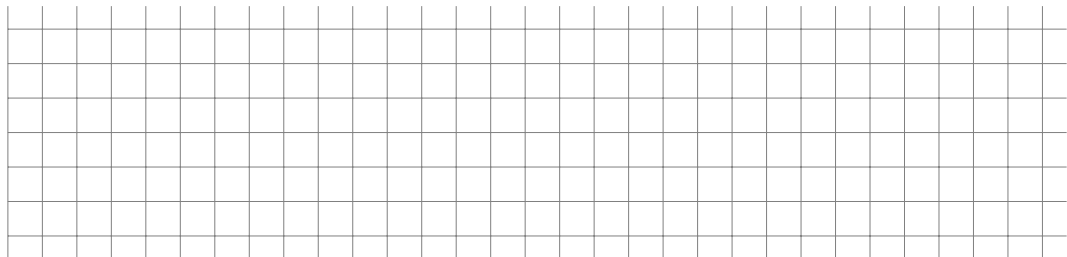
Calculer $A(\alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2)$, où

a)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \alpha_1 = 2, \alpha_2 = 3;$$

b)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}, \alpha_1 = -1, \alpha_2 = 1.$$



Série 6, Révision, Exercice 6, solution

Devoirs pour jeudi :

- MOOC 6.1 - 6.2 : regarder les vidéos et faire les petits quiz associés.
- MOOC 6.4 - 6.5 : regarder les vidéos et faire les petits quiz associés.
- La partie 6.3 du MOOC est optionnelle.

Algèbre linéaire

Chapitre 6 : Applications linéaires et matrices

Simone Deparis

EPFL Lausanne – MATH

Semaine 6



6.1 La représentation matricielle d'une application linéaire

Définition

Soient $T : V \rightarrow W$ linéaire et $\mathcal{B}_V = (v_1, \dots, v_n)$ et $\mathcal{B}_W = (w_1, \dots, w_m)$ des bases ordonnées de V et W respectivement.

La *matrice de T par rapport aux bases $\mathcal{B}_V$ et $\mathcal{B}_W$* est la matrice $m \times n$

$$[T]_{\mathcal{B}_W \mathcal{B}_V} = ([T(v_1)]_{\mathcal{B}_W} \cdots [T(v_n)]_{\mathcal{B}_W}).$$

6.2 La représentation matricielle d'une application linéaire : premières propriétés

La propriété la plus importante

Soient $\mathcal{B}_V = (v_1, \dots, v_n)$ et $\mathcal{B}_W = (w_1, \dots, w_m)$ des bases ordonnées de V et W respectivement. Alors

$$[T(v)]_{\mathcal{B}_W} = [T]_{\mathcal{B}_W \mathcal{B}_V} [v]_{\mathcal{B}_V},$$

ceci pour tout $v \in V$.

Série 6, Exercice 16

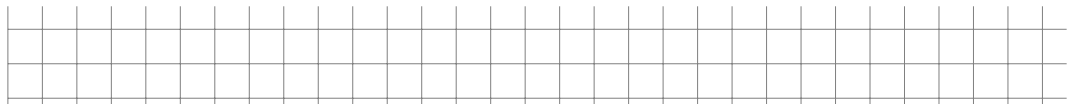
Soit $\vec{T} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'application linéaire donnée par

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 3x_1 + x_3 \\ 2x_2 + x_3 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix}.$$

Soient E la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et B une base de $\mathbb{R}^3$ donnée par

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

- (a) Donner la matrice M qui représente $\vec{T}$ par rapport aux bases E (de départ) et B (d'arrivée).
- (b) Même question pour les bases B (de départ) et E (d'arrivée).
- (c) Même question pour les bases B (de départ) et B (d'arrivée).



Série 6, Exercice 16, solution

Série 6, Exercice 18

Soient $\mathcal{C} = (1, t, t^2)$ la base canonique de $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ et $T: \mathbb{P}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ l'application linéaire définie par

$$T(a + bt + ct^2) = a + b(t - 1) + c(t - 1)^2.$$

Alors, on a $[T(p)]_{\mathcal{C}} = M[p]_{\mathcal{C}}$ pour tout $p \in \mathbb{P}_2(\mathbb{R})$, où

A. $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

C. $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

B. $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

D. $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Série 6, Exercice 18, solution

Série 6, Exercice 19

Soit $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'application linéaire définie par

$$T \left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 4x_3 \\ 3x_1 + 5x_2 - 2x_3 \\ x_1 + x_2 + 4x_3 \end{bmatrix}.$$

Considérer la base ordonnée $\mathcal{B} = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$ de $\mathbb{R}^3$.

Alors la matrice M telle que $[T(v)]_{\mathcal{B}} = M[v]_{\mathcal{B}}$ est

A. $M = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 6 \\ 0 & 8 & 8 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

C. $M = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 1 \\ 0 & 6 & 2 \\ -2 & -8 & -3 \end{pmatrix}$

B. $M = \begin{pmatrix} 6 & 0 & -2 \\ 2 & 6 & -8 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$

D. $M = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 6 & 8 & 8 \\ 6 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Série 6, Exercice 19, solution

Série 6, Exercice 20

Soient $T: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$ linéaire et les bases ordonnées $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^4$ et $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}^2$ définies par

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2x_1 - 3x_2 \\ x_3 + x_1 + x_4 \end{bmatrix}, \mathcal{B} = \left(\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right), \mathcal{C} = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$$

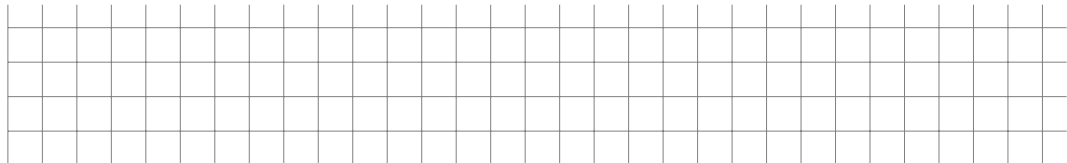
Alors la matrice M telle que $[T(v)]_{\mathcal{C}} = M[v]_{\mathcal{B}}$ est

A. $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2/3 & 2/3 \\ 1 & -2 & -1/3 & -1/3 \end{pmatrix}$

C. $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2/3 & 2/3 \\ 1 & -2 & -1/3 & -1/3 \end{pmatrix}$

B. $M = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 7/3 & 2 \\ 2 & -3 & -8/3 & -1 \end{pmatrix}$

D. $M = \begin{pmatrix} 4 & -4 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$



Série 6, Exercice 20, solution

6.4 La composition d'applications linéaires

Proposition

Soient U, V, W trois $\mathbb{R}$ -espaces vectoriels de dimensions finies et $\mathcal{B}_U, \mathcal{B}_V, \mathcal{B}_W$ des bases de U, V et W respectivement. Soient également $T : U \rightarrow V$ et $S : V \rightarrow W$ deux applications linéaires. Alors

$$[S \circ T]_{\mathcal{B}_W \mathcal{B}_U} = [S]_{\mathcal{B}_W \mathcal{B}_V} [T]_{\mathcal{B}_V \mathcal{B}_U}.$$

6.5 Applications inversibles

Proposition

Soient V, W deux $\mathbb{R}$ -espaces vectoriels de dimension $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{B}_V, \mathcal{B}_W$ des bases de V, W respectivement, et $T \in \mathcal{L}(V, W)$. Alors T est bijective si et seulement si $[T]_{\mathcal{B}_W \mathcal{B}_V}$ est une matrice inversible.

Devoirs pour mardi :

- Regarder les vidéos 6.6 - 6.7 du MOOC.
- Faire les petits quiz après les vidéos.
- MOOC 6.7.1 : faire quelques exercices en ligne (au moins un par sous-section).