

Algèbre linéaire

Chapitre 4 : Bases et dimension

Simone Deparis

EPFL Lausanne – MATH

Semaine 5



MOOC 3.8. Listes génératrices : problème 8

Soient $S = \{(2, 5, 3), (1, 0, 2)\}$, $T = \{(2, 0, 5), (3, 5, 5)\} \subseteq \mathbb{R}^3$.
Que vaut $\text{Vect}(S) \cap \text{Vect}(T)$? (Plusieurs réponses possibles.)

- 1 $\text{Vect}(S) \cap \text{Vect}(T) = 0$.
- 2 $\text{Vect}(S) \cap \text{Vect}(T) = \text{Vect}(\{(3, 5, 5)\})$.
- 3 $\text{Vect}(S) \cap \text{Vect}(T) = \text{Vect}(\{(6, 10, 10)\})$.
- 4 $\text{Vect}(S) \cap \text{Vect}(T) = \text{Vect}(\{(3, 5, 5), (1, 0, 2)\})$.

Questions complémentaires :

- Est-ce que $\text{Vect}(T) + \text{Vect}(S)$ est une somme directe ?
- Donner une base de $\text{Vect}(T) \cap \text{Vect}(S)$ et $\text{Vect}(T) + \text{Vect}(S)$.

MOOC 3.8. Listes génératrices : problème 8

4.4 Dimension

Définition

Soit V un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie. Le nombre d'éléments dans une base s'appelle la *dimension* de V et on le désigne par $\dim V < \infty$. Autrement $\dim V = \infty$.

Proposition

Soit $\dim V < \infty$. Alors les deux affirmations suivantes sont vérifiées.

- Si $\{v_1, \dots, v_r\}$ est un ensemble générateur de V , alors il existe une base $\mathcal{B}$ de V telle que $\mathcal{B} \subset \{v_1, \dots, v_r\}$. On parle d'*extraction de base*.
- Si $\{v_1, \dots, v_r\}$ est une partie libre de V , alors il existe une base $\mathcal{B}$ de V telle que $\{v_1, \dots, v_r\} \subset \mathcal{B}$. On parle de *complétion en une base*.

4.5 Bases dans un espace de dimension connue

Théorème

Soit $\dim V = n$. Alors les deux affirmations suivantes sont vérifiées.

- Si $S \subset V$ est une famille génératrice qui possède n éléments, alors S est une base de V .
- Si $S' \subset V$ est une famille libre qui possède n éléments, alors S' est une base de V .

4.6 Systèmes homogènes et base de l'espace des solutions

Soient $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ et $X = (x_1 x_2 \cdots x_n)^T$, où $x_1, \dots, x_n$ sont des inconnues. Alors l'ensemble des solutions du système linéaire $AX = 0$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

Proposition

Soient A et X comme ci-dessus. Alors la dimension de l'espace des solutions du système $AX = 0$ est égale au nombre de variable(s) libre(s) dans une forme échelonnée de A .

Proposition

Soient A et X comme ci-dessus. Pour trouver une base de l'espace des solutions du système $AX = 0$, on pose successivement une des variables libres égale à 1 et toutes les autres égales à 0.

Définition

Noyau d'une matrice, $\ker(A) = \{X : AX = 0\}$

4.7 La dimension d'un sous-espace

Théorème

Soient V un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel avec $\dim V < \infty$ et W un sous-espace vectoriel de V . Alors

- $\dim W < \infty$.
- $\dim W \leq \dim V$.
- Si $\dim W = \dim V$, alors $W = V$.

Question 1

Soit V un espace vectoriel de dimension n et $E \subset V$ un sous-ensemble fini avec m éléments. Quelles affirmations sont toujours vraies ? (plusieurs réponses correctes)

- A. Si $m = n$ alors E est une base de V .
- B. Si $m < n$ alors E ne peut pas engendrer V .
- C. Si $m > n$ alors E est linéairement dépendant.
- D. Aucune des trois affirmations ci-dessus.

Série 5, Exercice 10

L'assertion suivante est-elle correcte (justifier) ?

Tout ensemble de vecteurs $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p\}$ de $\mathbb{R}^n$ est linéairement dépendant si $p > n$.

4.9 Rang-ligne, rang-colonne d'une matrice

Soient A et B $m \times n$.

Définition

- Le *rang ligne* de A est $\dim \text{Lgn}(A)$.
- Le *rang colonne* de A est $\dim \text{Col}(A)$.

Proposition

Soient A, B des matrices lignes équivalentes. Alors $\text{Lgn } A = \text{Lgn } B$ et le rang ligne de A est égal au rang ligne de B .

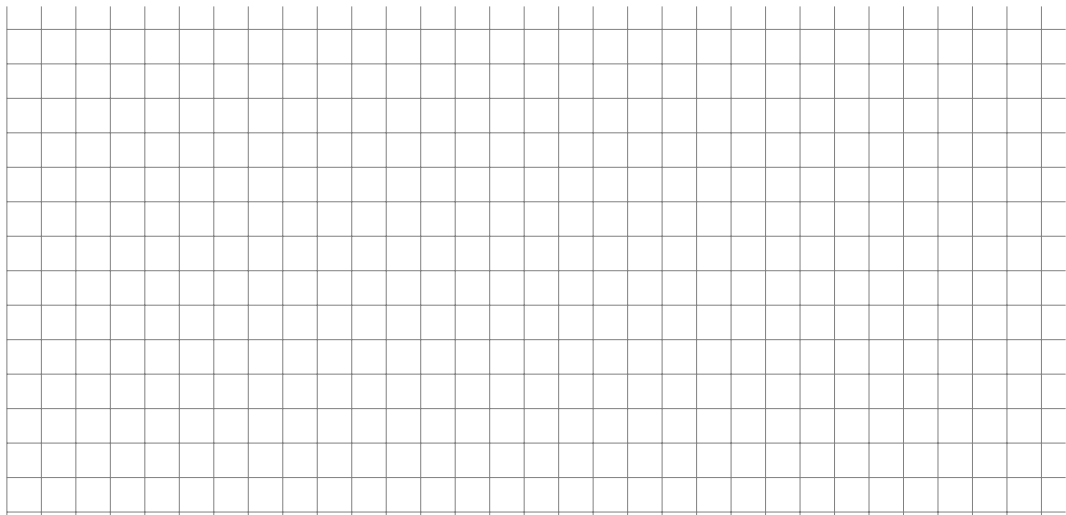
Proposition

Soit A une matrice échelonnée. Alors

- le rang ligne de A est égal au nombre de pivots.
- une base de l'espace ligne de A est donnée par les lignes contenant un pivot.

Série 5, Exercice 9

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$. Trouver une base de $\text{Ker}(A)$ et de $\text{Col}(A)$.



Série 5, Exercice 9, solution

Question 2

Vrai ou faux ? Soit A une matrice de taille $n \times n$ qui est inversible.
Alors le rang ligne de A est n .

- A. Vrai
- B. Faux

4.11 Coordonnées par rapport à une base

Définition

Soient $\dim V = n$, $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ une base ordonnée de V et $v \in V$. Les scalaires $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ tels que $v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$ sont appelés *coordonnées de v par rapport à la base $\mathcal{B}$* et on écrit

$$[v]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}.$$

Les coordonnées d'un vecteur sont uniques.

4.11 Coordonnées par rapport à une base

Proposition

Soient V un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie n et $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ une base ordonnée de V . Alors les deux affirmations suivantes sont vérifiées.

- Pour tout $v_1, v_2 \in V$, on a $[v_1 + v_2]_{\mathcal{B}} = [v_1]_{\mathcal{B}} + [v_2]_{\mathcal{B}}$.
- Pour tout $v \in V$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a $[\lambda v]_{\mathcal{B}} = \lambda[v]_{\mathcal{B}}$.

Série 5, Exercice 10

- (a) On considère le vecteur $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ exprimé dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

Trouver les coordonnées de $\vec{v}$ dans la base $\{\vec{b}_1, \vec{b}_2\}$ de $\mathbb{R}^2$, où $\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

- (b) Même question pour $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ donné dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ à

exprimer dans la base $\{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3\}$ donnée par $\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$,

$$\vec{b}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Série 5, Exercice 10, solution

Question 3

Quelles sont les coordonnées de la matrice $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ par rapport à la base ordonnée

$$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right) ?$$

A. $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

B. $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

C. $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

D. $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Question 3, solution

4.12 Comment trouver une base à partir d'un système de générateurs

Méthode pour trouver une base à partir d'un système de générateurs

Soient $\dim V = n$ et $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ une base de V ,

Soient $S = \{w_1, \dots, w_r\} \subset V$ et $W = \text{Vect}(S)$.

Pour trouver une base de W :

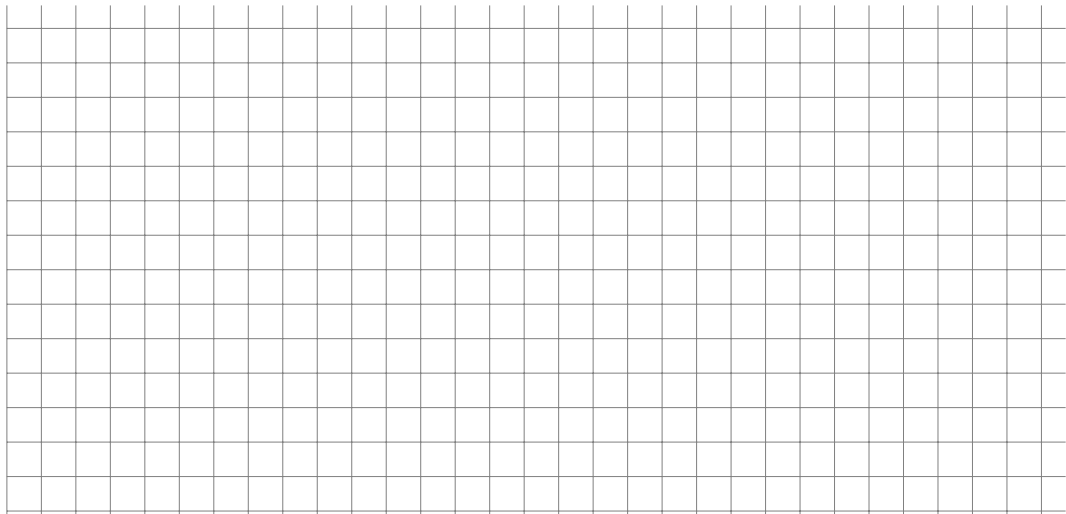
- Pour chaque $k = 1, \dots, r$, on écrit $[w_k]_{\mathcal{B}} = (\alpha_1 \ \alpha_2 \ \cdots \ \alpha_n)^T$.
- On définit C $r \times n$ avec lignes égales aux vecteurs $[w_k]_{\mathcal{B}}^T = (\alpha_1 \ \cdots \ \alpha_n)$.
- On échelonne la matrice C :
 - les lignes non-nulles forment une base de $\text{Lgn } C$.
 - ces lignes sont les coordonnées (par rapport à $\mathcal{B}$) de vecteurs dans V . Ces derniers forment une base de W .

Pour compléter cette base en une base de V :

- On remplace les lignes nulles de la matrice échelonnée par des lignes non-nulles de manière à ce que celle-ci contienne n pivots. Les vecteurs de V associés aux lignes de cette nouvelle matrice forment une base de V .

Série 5, Exercice 9

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$. Trouver une base de $\text{Ker}(A)$ et de $\text{Col}(A)$.



Série 5, Exercice 9, solution

Question 4

Quelle est la dimension du sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ suivant ?

$$W := \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

- A. 1
- B. 2
- C. 3
- D. 4

Trouver aussi une base de W et la compléter.

Chapitre 4 : Bases et dimension, calculs à savoir faire.

- Déterminer si un ensemble donné de vecteurs est linéairement indépendant ou pas.
- Trouver une base d'un espace vectoriel donné (extraire une base d'un ensemble générateur, compléter un ensemble de vecteurs libres en une base).
- Trouver la dimension d'un espace vectoriel.
- Trouver une base de l'espace des solutions d'un système linéaire homogène.
- Trouver une base de l'espace colonne et de l'espace ligne d'une matrice.
- Calculer le rang d'une matrice.
- Calculer les coordonnées d'un vecteur par rapport à une base donnée.

Devoirs pour jeudi :

- MOOC 4.13 : faire quelques exercices en ligne.
- MOOC 5.0 - 5.1 : regarder les vidéos et faire les petits quiz après les vidéos.
- MOOC 5.3 - 5.4 : regarder les vidéos et faire les petits quiz après les vidéos.

Algèbre linéaire

Chapitre 5 : Applications linéaires

Simone Deparis

EPFL Lausanne – MATH

Semaine 5



5.0 Quelques rappels sur les applications

X et Y deux ensembles.

Définition ($f : X \rightarrow Y$)

Une *application* (ou *fonction*) f de X dans Y , est une règle qui associe à chaque $x \in X$ un unique élément $f(x)$, de Y .

Définition (injective et surjective)

$f : X \rightarrow Y$ est dite *injective* si $f(x) = f(x')$ pour $x, x' \in X$, implique $x = x'$.

$f : X \rightarrow Y$ est dite *surjective* si pour tout $y \in Y$, il existe $x \in X$ t.q. $f(x) = y$.

Définition

Soient $f : X \rightarrow Y$ et $g : Y \rightarrow Z$. La *composition* de f avec g est l'application $g \circ f : X \rightarrow Z$ définie par $(g \circ f)(x) = g(f(x))$, ceci pour tout $x \in X$.

5.1 Applications linéaires d'espaces vectoriels.

Définition

Soient V, W des $\mathbb{R}$ -espaces vectoriels et $T : V \rightarrow W$ une application. On dit que T est une *application linéaire* (ou simplement que T est *linéaire*) si pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et tous $u, v \in V$, on a

$$T(\lambda u + v) = \lambda T(u) + T(v).$$

Les propriétés suivantes sont vérifiées.

- $T(0_V) = 0_W$.
- $T(-v) = -T(v)$ pour tout $v \in V$.

Supposons que $\dim V = n < \infty$ et que $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ désigne une base ordonnée de V . Alors T est déterminée par les images $\{T(v_1), \dots, T(v_n)\}$.

5.4 D'autres exemples, généralités I

Soit V un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel admettant une base $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$

Soient W un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel arbitraire et $w_1, \dots, w_n \in W$. On définit l'application linéaire $T : V \rightarrow W$ par $T(v_k) = w_k, k = 1, \dots, n$. Alors

$$T(a_1v_1 + \dots + a_nv_n) = a_1w_1 + \dots + a_nw_n, \quad (\forall a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R})$$

L'application $T : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ définie par

$$T(a_1v_1 + \dots + a_nv_n) = (a_1, \dots, a_n)^T, \quad (\forall a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R})$$

est linéaire. Il s'agit des coordonnées par rapport à la base $\mathcal{B}$.

5.4 D'autres exemples, généralités II

Soient $\mathcal{B}_V = (v_1, \dots, v_n)$ une base de V et $\mathcal{B}_W = (w_1, \dots, w_m)$ une base de W .

Soit $A = (\vec{a}_1 \dots \vec{a}_n)$ une matrice $m \times n$, $\vec{a}_n \in \mathbb{R}^m$.

On définit l'application linéaire $T_A : V \rightarrow W$ associée à A par

$$[T_A(v)]_{\mathcal{B}_W} = A[v]_{\mathcal{B}_V}$$

On a aussi, pour $k = 1, \dots, n$:

$$[T_A(v_k)]_{\mathcal{B}_W} = A[v_k]_{\mathcal{B}_V} = A\vec{e}_k = \vec{a}_k, \text{ où } \vec{e}_k = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)^T.$$

En d'autres termes :

$$A = (\vec{a}_1 \dots \vec{a}_n) = ([T_A(v_1)]_{\mathcal{B}_W} \dots [T_A(v_n)]_{\mathcal{B}_W})$$

Question 1

Soit A une matrice de taille $m \times n$. Alors, l'application $T_A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ définie par $T_A(\vec{x}) = A\vec{x}$ est une application linéaire.

- A. Vrai
- B. Faux

Question 2

On considère l'application $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par

$$T(a, b) = (a + b, a^2 + b^2).$$

Alors,

- A. T est linéaire,
- B. T n'est pas linéaire.

Question 3

On considère l'application $T: \mathcal{M}_{2 \times 3}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_{3 \times 2}(\mathbb{R})$ définie par

$$T(A) = A^T.$$

Alors,

- A. T est linéaire,
- B. T n'est pas linéaire.

Question 9

On considère l'application $T: \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par

$$T\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = (a + b, c + d - a + 1).$$

Alors,

- A. T est linéaire,
- B. T n'est pas linéaire.

Devoirs pour mardi :

- Regarder les vidéos 5.5 - 5.10 du MOOC.
- Faire les petits quiz après les vidéos.
- MOOC 5.11 : faire quelques exercices en ligne.