Algèbre linéaire
Chapitre 3 : Espaces vectoriels

Simone Deparis

EPFL Lausanne – MATH

Semaine 4

Définition

Soient V un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $v_1, \ldots, v_t \in V$. Une *combinaison linéaire* de $v_1, \ldots, v_t$ est un vecteur de la forme $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots \lambda_t v_t$, où $\lambda_i \in \mathbb{R}$ pour tout $1 \leq i \leq t$.

Définition

Soient V un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $S \subset V$ une collection non-vide de vecteurs. On écrit $\mathrm{Vect}(S)$ pour l'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs de S, c'est-à-dire

$$\mathrm{Vect}(S) = \{\lambda_1 v_1 + \cdots \lambda_t v_t : \lambda_i \in \mathbb{R}, v_i \in S\}.$$

Remarque

D'autres notations sont parfois utilisées pour désigner l'ensemble $\mathrm{Vect}(S)$. On rencontrera notamment $\mathrm{Vect}\{S\}$, $\mathrm{span}(S)$ ou encore $\mathrm{lin}(S)$, par exemple.

Proposition

Soient V un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $S \subset V$ une famille non-vide. Alors Vect(S) est un sous-espace vectoriel de V. On l'appelle le *sous-espace engendré par* S. Par convention, on notera Vect$(\emptyset) = \{0\}$.

Question 1

Soit $V = \mathbb{R}^3$ et

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \subset V, w = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

$w \in \mathrm{Vect}(S)$

A. Vrai

B. Faux

Question 2

Soit W un espace vectoriel et $S, T \subset W$. Qu'est-ce qui est toujours vrai ?

A. Si $S \subset \mathrm{Vect}(T)$, alors $\mathrm{Vect}(T) \subset \mathrm{Vect}(S)$.

B. Si $S \subset \mathrm{Vect}(T)$, alors $\mathrm{Vect}(S) \subset \mathrm{Vect}(T)$.

C. Aucun des deux énoncés ci-dessus.

Question 3

Soit W un espace vectoriel et $v, w \in W$. Qu'est-ce qui est toujours vrai ? (Il y a plusieurs options correctes)

A. $\mathrm{Vect}(v, w) = \mathrm{Vect}(v + w, w)$.

B. $\mathrm{Vect}(v, w) = \mathrm{Vect}(v + w)$.

C. $\mathrm{Vect}(v, w) = \mathrm{Vect}(\lambda v, w)$ pour tous les $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\lambda \neq 0$.

D. $\mathrm{Vect}(v, w) = \mathrm{Vect}(w, v)$.

Définition

Soient V un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $W_1, W_2 \subset V$ deux sous-espaces vectoriels de V. La *somme* de W_1 et W_2 est le sous-ensemble de V défini par

$$W_1 + W_2 = \{u + v : u \in W_1, v \in W_2\}.$$

Proposition

Soient V un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $W_1, W_2 \subset V$ deux sous-espaces vectoriels de V. Alors $W_1 \cap W_2$ et $W_1 + W_2$ sont des sous-espaces vectoriels de V.

Définition

Soient V un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $W_1, W_2 \subset V$ des sous-espaces vectoriels de V. On dit que la somme $W_1 + W_2$ est *directe* et on écrit $W_1 + W_2 = W_1 \oplus W_2$ si $W_1 \cap W_2 = \{0\}$.

Question 4

Soit V un espace vectoriel et $W_1, W_2 \subset V$ deux sous-espaces vectoriels. Quels sous-ensembles de V sont toujours des sous-espaces vectoriels ? (Il y a plusieurs options correctes)

A. $W_1 + W_2$.

B. $W_1 \cap W_2$.

C. $W_1 \cup W_2$.

Définition

Soit $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ une matrice de taille $m \times n$ à coefficients réels. On appelle *l'espace ligne de* A le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ engendré par les lignes de A, vues comme des vecteurs de $\mathbb{R}^n$. Autrement dit, si $L_1, \dots, L_m$ sont les lignes de A (vues comme des vecteurs de $\mathbb{R}^n$), alors l'espace ligne de A est défini par $\mathrm{Vect}(\{L_1, \dots, L_m\})$.

Définition

Soit $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ une matrice de taille $m \times n$ à coefficients réels. On appelle *l'espace colonne de* A le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^m$ engendré par les colonnes de A, vues comme des vecteurs de $\mathbb{R}^m$. Autrement dit, si $C_1, \dots, C_n$ sont les colonnes de A (vues comme des vecteurs de $\mathbb{R}^m$), alors l'espace colonne de A est défini par $\mathrm{Vect}(\{C_1, \dots, C_n\})$.

Question 5

Vrai/faux : Soit I_n la matrice identité de taille $n \times n$. Alors, $\operatorname{Lgn} I_n = \mathbb{R}^n$.

A. Vrai

B. Faux

Question 6

Vrai/faux : Soit A une matrice inversible de taille $n \times n$. Alors, $\operatorname{Lgn} A = \mathbb{R}^n$.

A. Vrai

B. Faux

Calculs à savoir faire :

1. Déterminer si un sous-ensemble d'un espace vectoriel est un sous-espace vectoriel.
2. Connaître les exemples principaux d'espaces vectoriels ($\mathbb{R}^n$, $\mathbb{P}_d(\mathbb{R})$, l'espace vectoriel des matrices $m \times n$).
3. Pour un sous-ensemble S d'un espace vectoriel V, déterminer si un vecteur donné de V est contenu dans $\mathrm{Vect}(S)$.
4. Déterminer si une somme de sous-espaces vectoriels est directe.

Question 7

L'ensemble des vecteurs

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathbb{R}^2$$

est linéairement indépendant.

A. Vrai

B. Faux

Question 8

L'ensemble

$$E = \{v_1, v_2, v_3, v_4\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathbb{R}^3$$

est linéairement indépendant.

A. Vrai

B. Faux

Devoirs pour jeudi :

- Regarder les vidéos 4.2 - 4.6 du MOOC.
- Faire les petits quiz après les vidéos.

Algèbre linéaire
Chapitre 4a : Bases et dimension

Simone Deparis

EPFL Lausanne – MATH

Semaine 4

Calculs à savoir faire :

1. Opérations sur les matrices et leurs propriétés (addition, multiplication avec des scalaires, multiplication matricielle, transposition,...).
2. Déterminer si une matrice est inversible et (si elle est inversible) calculer son inverse.
3. Connaître les matrices élémentaires et leur relation avec les opérations élémentaires sur les lignes et sur les colonnes.

3.7 Espace ligne, espace colonne d'une matrice

$M_{m\times n}(\mathbb{R}) = \{$ matrices de taille $m \times n$ à coefficients réels $\}$

Définition

Soit A $m \times n$. On appelle *l'espace ligne de* A le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ engendré par les lignes de A, vues comme des vecteurs de $\mathbb{R}^n$.
$\mathrm{Lgn}(A) = \mathrm{Vect}(\{L_1, \ldots, L_m\})$., où $L_1, \ldots, L_m$ sont les lignes de A.

Définition

Soit A $m \times n$. On appelle *l'espace colonne de* A le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^m$ engendré par les colonnes de A, vues comme des vecteurs de $\mathbb{R}^m$.
$\mathrm{Col}(A) = \mathrm{Vect}(\{C_1, \ldots, C_n\})$., où $C_1, \ldots, C_n$ sont les colonnes de A.

Question 1

Vrai/faux : Soit I_n la matrice identité de taille $n \times n$. Alors, $\operatorname{Lgn} I_n = \mathbb{R}^n$.

A. Vrai

B. Faux

Question 2

Soit A une matrice $m \times n$. Quelles affirmations sont toujours vraies ?

A. $\operatorname{Lgn} A = \operatorname{Lgn} A^T$

B. $\operatorname{Col} A = \operatorname{Col} A^T$

C. $\operatorname{Col} A = \operatorname{Lgn} A^T$.

D. Aucune des relations ci-dessus.

4.1 Dépendance et indépendance linéaires

Soit V un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Définition

Soit $S \subset V$. On dit que S est *linéairement dépendante* (ou *liée*) s'il existe des vecteurs distincts $v_1, \dots, v_r \in S$ et des scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{R}$ non tous nuls tels que $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_r v_r = 0.$.
S'il n'existe pas de tels vecteurs dans S, alors on dit que S est *linéairement indépendante* (ou *libre*).

Remarque : Si $0 \in S$, alors S est liée car $\lambda \cdot 0 = 0$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.

Série 4, Exercice 7

On rappelle que $\mathbb{P}_3$ est l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 3.

(a) Les vecteurs de $\mathbb{P}_3$ suivants sont-ils linéairement indépendants ?

(i) p_1, p_2, p_3 tels que $p_1(t) = 1 - t^2$, $p_2(t) = t^2$, $p_3(t) = t$, $t \in \mathbb{R}$.

(ii) p_1, p_2, p_3 tels que $p_1(t) = 1 + t + t^2$, $p_2(t) = t + t^2$, $p_3(t) = t^2$, $t \in \mathbb{R}$.

(b) Les vecteurs p_1, p_2, p_3 de (ii) forment-ils une base de $\mathbb{P}_3$?

Série 4, Exercice 7, solution

Question 3

Vrai/faux : L'ensemble

$$E = \{t^2 + t, 1, t + 2\} \subset \mathbb{P}_2$$

engendre l'espace vectoriel $\mathbb{P}_2$.

A. Vrai
B. Faux

Question 5

L'ensemble

$$E = \{t^2 + t, 1, t + 2\} \subset \mathbb{P}_2$$

est linéairement indépendant.

A. Vrai
B. Faux

Question 4

L'ensemble des vecteurs

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathbb{R}^2$$

est linéairement indépendant.

A. Vrai
B. Faux

Proposition

Soient $v_1, \ldots, v_r \in V$ des vecteurs de V. Alors ces derniers sont linéairement dépendants si et seulement s'il existe $1 \leq i \leq r$ tels que
$v_i \in \text{Vect}(\{v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_r\}),.$

Proposition

Soit $S \subset V$ un ensemble linéairement indépendant (=une famille libre de vecteurs) dans V. Alors tout sous-ensemble $T \subset S$ est aussi linéairement indépendant.
Soit $S \subset V$ un ensemble linéairement dépendant (=famille liée) dans V. Alors toute collection de vecteurs T contenant S est également linéairement dépendante.

Question 6

L'ensemble

$$E = \{v_1, v_2, v_3, v_4\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathbb{R}^3$$

est linéairement indépendant.

A. Vrai

B. Faux

Question 7

Soit V un espace vectoriel et $S, T \subset V$ des sous-ensembles finis. Quelles affirmations sont correctes ? (plusieurs réponses possibles)

A. Si S et T sont des familles libres, alors $S \cup T$ est une famille libre.

B. Si S et T sont des familles libres, alors $S \cap T$ est une famille libre.

C. Si S et T sont des familles liées, alors $S \cup T$ est une famille liée.

D. Si S et T sont des familles liées, alors $S \cap T$ est une famille liée.

Question 8

Vrai ou faux ? Soit V un espace vectoriel et $v_1, v_2, v_3 \in V$. Si tous les trois ensembles $\{v_1, v_2\}$, $\{v_1, v_3\}$ et $\{v_2, v_3\}$ sont linéairement indépendants, alors $\{v_1, v_2, v_3\}$ est aussi linéairement indépendant.

A. Vrai

B. Faux

4.3 Bases et dimension

Définition

Soit $\mathscr{B} \subset V$. On dit que $\mathscr{B}$ est une *base* de V si les deux conditions suivantes sont vérifiées.

- Tout $v \in V$ est une combinaison linéaire de vecteurs de $\mathscr{B}$, i.e. $\mathrm{Vect}(\mathscr{B}) = V$.
- $\mathscr{B}$ est linéairement indépendant.

Définition

On dit d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel V qu'il est *de dimension finie* s'il possède une base finie. Sinon, on dit que V est *de dimension infinie*.

Théorème

Soit V un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie. Alors toutes les bases de V sont finies et possèdent le même nombre d'éléments.

Question 9

Une base de $\mathbb{P}_d$ est donnée par

A. $\{t, t^2, \ldots, t^d\}$

B. $\{1, t, t^2, \ldots, t^d\}$

C. $\{1, 1+t, 1+t+t^2, \ldots, 1+t+\cdots+t^d\}$

(plusieurs réponses correctes).

4.4 Dimension

Définition

Soit V un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie. Le nombre d'éléments dans une base s'appelle la *dimension* de V et on le désigne par $\dim V < \infty$.. Autrement $\dim V = \infty$.

Proposition

Soit $\dim V < \infty$. Alors les deux affirmations suivantes sont vérifiées.

- Si $\{v_1, \ldots, v_r\}$ est un ensemble générateur de V, alors il existe une base $\mathscr{B}$ de V telle que $\mathscr{B} \subset \{v_1, \ldots, v_r\}$. On parle d'*extraction de base*.
- Si $\{v_1, \ldots, v_r\}$ est une partie libre de V, alors il existe une base $\mathscr{B}$ de V telle que $\{v_1, \ldots, v_r\} \subset \mathscr{B}$. On parle de *complétion en une base*.

Question 10

Soit

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} 9 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 12 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathbb{R}^3.$$

Alors

A. $\dim \operatorname{Vect}(E) = 3$

B. $\dim \operatorname{Vect}(E) = 2$

C. $\dim \operatorname{Vect}(E) = 1$

D. $\dim \operatorname{Vect}(E) = 0$

4.5 Bases dans un espace de dimension connue

Théorème

Soit $\dim V < \infty$. Alors les deux affirmations suivantes sont vérifiées.

- Si $S \subset V$ est une famille génératrice qui possède n éléments, alors S est une base de V.
- Si $S' \subset V$ est une famille libre qui possède n éléments, alors S' est une base de V.

4.6 Systèmes homogènes et base de l'espace des solutions

Soient $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ et $X = \left(x_1 x_2 \cdots x_n\right)^T$, où $x_1, \ldots, x_n$ sont des inconnues. Alors l'ensemble des solutions du système linéaire $AX = 0$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

Proposition

Soient A et X comme ci-dessus. Alors la dimension de l'espace des solutions du système $AX = 0$ est égale au nombre de variable(s) libre(s) dans une forme échelonnée de A.

Proposition

Soient A et X comme ci-dessus. Pour trouver une base de l'espace des solutions du système $AX = 0$, on pose successivement une des variables libre égale à 1 et toutes les autres égales à 0.

Série 4, Exercice 8

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

a) Déterminer le rang de A et la dimension du noyau de A.

b) Même question pour A^T.

c) On suppose qu'une matrice A de taille 7×7 possède un pivot dans chaque ligne. Quel est le rang de A ? Quelle est la dimension du noyau de A ?

d) On considère une matrice A de taille $m \times n$ et un vecteur $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$. Quelle doit être la relation entre le rang de $[\,A\ \vec{b}\,]$ et le rang de A pour que l'équation $A\vec{x} = \vec{b}$ soit compatible ?

Série 4, Exercice 8, solution

Chapitre 4a, Concepts importants

- Espace vectoriel,
- $\mathrm{Vect}(E)$,
- linéairement dépendant et indépendant,
- base et dimension
- coordonnées
-

Sur la page Moodle il y a des liens vers des vidéos complémentaires de 3Blue1Brown

Devoirs pour mardi :

- Regarder les vidéos 4.7 et 4.9 - 4.12 du MOOC.
- Faire les petits quiz après les vidéos.
- MOOC 4.7.1 : faire quelques exercices en ligne (au moins un par sous-section).