

Algèbre linéaire

Chapitre 1 Systèmes d'équations linéaires

Simone Deparis

EPFL Lausanne – MATH

Semaine 2



Les Pivots, clarification

Définition

Une matrice est dite échelonnée si toutes les conditions suivantes sont satisfaites.

- Le premier coefficient non-nul d'une ligne est à droite de celui de la ligne précédente. Un tel coefficient est appelé un pivot de la matrice.
- Toute ligne nulle n'est suivie que de lignes nulles.

Définition

Une matrice est dite échelonnée réduite si toutes les conditions suivantes sont satisfaites.

- La matrice est échelonnée.
- Chaque pivot est égal à 1
- Le seul coefficient non-nul dans les colonnes contenant un pivot est le pivot lui-même.

Question 1

Vrai/faux : Une matrice peut avoir plusieurs formes échelonnées.

- A. Vrai.
- B. Faux.

Question 2

Vrai/faux : Si une forme échelonnée d'une matrice augmentée possède $[0, 0, \dots, 0, 5]$ comme ligne, alors le système linéaire correspondant est incompatible.

- A. Vrai.
- B. Faux.

Question 3

Vrai/faux : Soit A une matrice dans la forme échelonnée. Alors chaque ligne contient au plus un pivot.

- A. Vrai.
- B. Faux.

Question 4

Vrai/faux : Un système d'équations linéaires homogène admet toujours au moins une solution.

- A. Vrai.
- B. Faux.

Question 5

On suppose que la matrice des coefficients d'un système d'équations linéaires est une matrice échelonnée réduite de taille 3×5 qui contient 3 pivots. Alors

- A. ce système est compatible.
- B. ce système est incompatible.
- C. on ne peut rien dire sur la compatibilité de ce système.

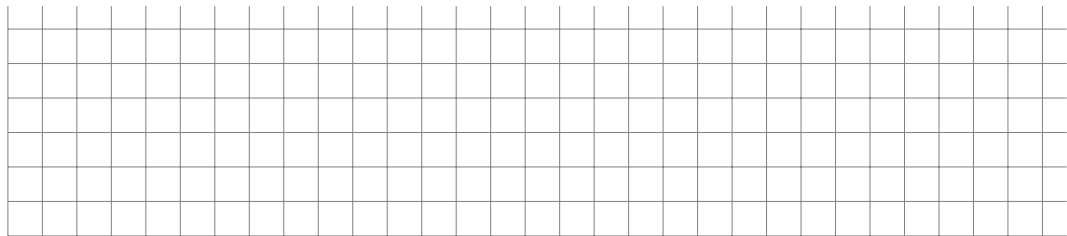
Exercice 2

Déterminer si les systèmes linéaires homogènes suivants ont une solution non triviale.

$$\text{a) } \begin{cases} 2x_1 - 5x_2 + 8x_3 = 0 \\ -2x_1 - 7x_2 + x_3 = 0 \\ 4x_1 + 2x_2 + 7x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} x_1 - 3x_2 + 7x_3 = 0 \\ -2x_1 + x_2 - 4x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 9x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} -7x_1 + 37x_2 + 119x_3 = 0 \\ 5x_1 + 19x_2 + 57x_3 = 0 \end{cases}$$



Exercice 2, solution

Question 6a

Le système associé à la matrice augmentée

$$\left(\begin{array}{cccc} 2 & -5 & 8 & 0 \\ -2 & -7 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 7 & 0 \end{array} \right),$$

possède

- A. une infinité de solutions,
- B. une unique solution,
- C. aucune solution.

Question 6b

Le système associé à la matrice augmentée

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 7 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -4 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 9 & 0 & 0 \end{array} \right),$$

possède

- A. une infinité de solutions,
- B. une unique solution,
- C. aucune solution.

Question 6c

Le système associé à la matrice augmentée

$$\left(\begin{array}{cccc} -7 & 37 & 119 & 0 \\ 5 & 19 & 57 & 0 \end{array} \right),$$

possède

- A. une infinité de solutions,
- B. une unique solution,
- C. aucune solution.

Question 7

Le système associé à la matrice augmentée

$$\left(\begin{array}{cccccc} 2 & 4 & 3 & 11 & -10 & 0 \\ -1 & -2 & 2 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 12 & -2 & 0 \\ 3 & 6 & -2 & -3 & 5 & 0 \end{array} \right),$$

possède

- A. aucune variable libre,
- B. une variable libre,
- C. deux variables libres,
- D. trois variables libres.

Chapitre 1 : Systèmes d'équations linéaires

Il faut connaître les définitions et les résultats de ce chapitre (regarder encore une fois les concepts clés).

Calculs à maîtriser :

- 1 Échelonner des matrices (algorithme de Gauss)
- 2 Déterminer si un système d'équations linéaires possède une unique solution, pas de solution ou une infinité de solutions
- 3 Résoudre des systèmes d'équations linéaires.
- 4 Connaître les opérations élémentaires sur les lignes, déterminer si deux matrices données sont équivalentes selon les lignes.

Question 8

On considère le système d'équations linéaires dont la matrice augmentée est

$$\left(\begin{array}{cccc} 0 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 2h - 4 \\ -1 & -1 & 2 & -3 - h \end{array} \right),$$

où $h \in \mathbb{R}$ est un paramètre. Alors ce système d'équations linéaires

- A. possède une infinité de solutions pour $h = 3$
- B. possède une infinité de solutions pour $h = -3$
- C. possède un nombre fini de solutions pour toute valeur $h \in \mathbb{R}$
- D. possède une infinité de solutions pour toute valeur $h \neq \pm 3$.

Devoirs pour jeudi :

- MOOC 1.9 : faire les exercices en ligne (au moins un par sous-section). Vous pouvez aussi faire ces exercices le week-end ou dans les semaines prochaines.
- MOOC 2.1-2.4 : regarder les vidéos et faire les petits quiz après les vidéos.
- Utiliser Ed Discussion.

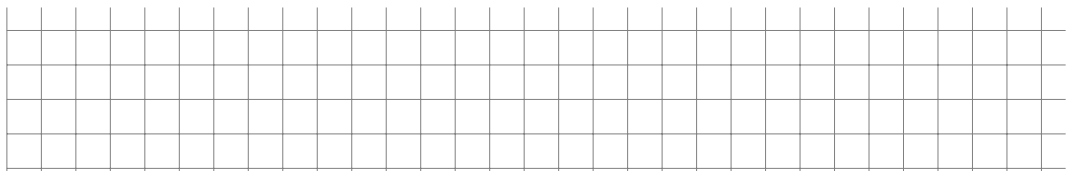
Exercice 4

Considérons les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$
$$D = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Calculer les produits suivants (s'ils existent). Si les produits n'existent pas, expliquer pourquoi.

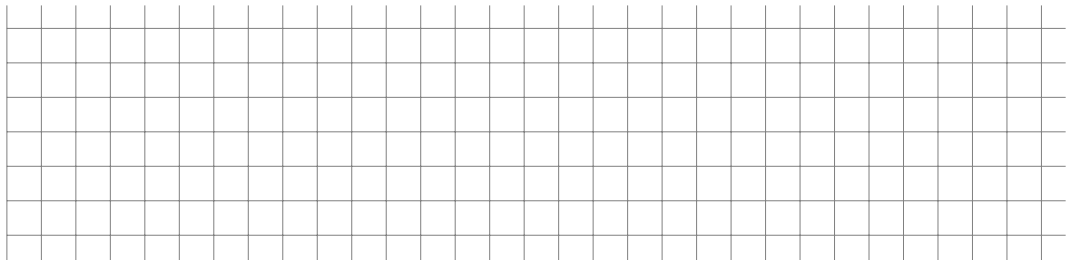
- a) $AB, BA, AC, CA, BC, CB, CD, EC, EA$
- b) $AA^T, A^T A, BA^T, BC^T, C^T A, BD^T, D^T B$



Exercice 4, solution

Exercice 5

- (a) Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$. Trouver (si elle existe) une matrice B de taille 2×2 non nulle telle que $AB = 0$. (Idée : écrire AB sous la forme $\begin{pmatrix} A\vec{b}_1 & A\vec{b}_2 \end{pmatrix}$)
- (b) Même question pour $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.
- (c) Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 5 & k \end{pmatrix}$. Pour quelle(s) valeur(s) de $k \in \mathbb{R}$ a-t-on $AB = BA$?
- (d) Trouver une matrice A non nulle telle que $A^2 = 0$.

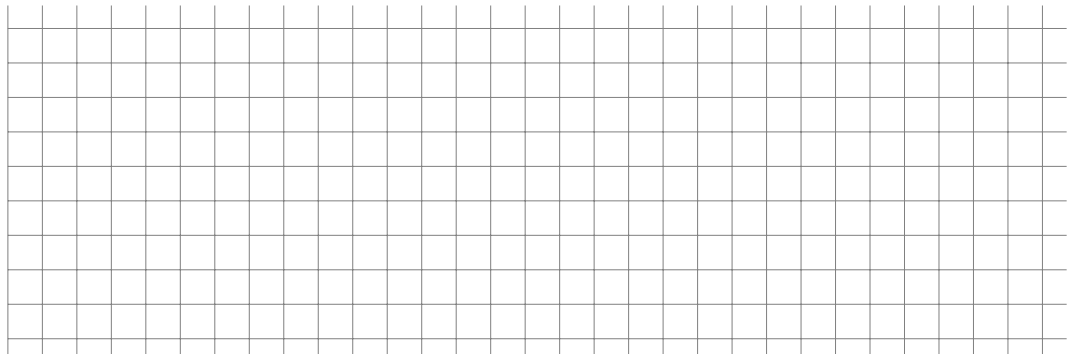


Exercice 5, solution

Exercice 6

Indiquer pour chaque énoncé s'il est vrai ou faux et justifier brièvement votre réponse.

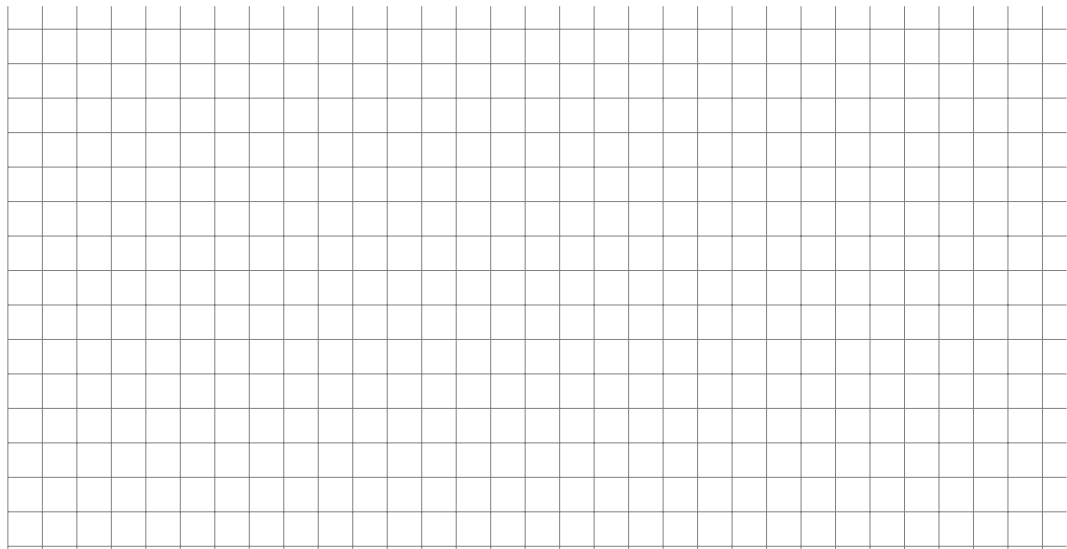
- (a) Une matrice A de taille $m \times n$ ne peut être multipliée par la gauche que par des matrices B de taille $p \times m$.
- (b) Le produit matriciel est commutatif.
- (c) Si le produit de deux matrices A et B est $AB = 0$, alors $A = 0$ ou $B = 0$.
- (d) $(ABC)^T = C^T B^T A^T$.



Exercice 6, solution

Exercice 7

Soient A et B des matrices telles que le produit AB soit bien défini. Montrer que $(AB)^T = B^T A^T$.



Exercice 7, solution

Rendu en groupe : 20-30 minutes pendant les exercices

On considère le système d'équations linéaires dont la matrice augmentée est

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 7 & 3 & h+11 \\ 2 & 14 & 1 & 6 \\ -1 & -7 & 1 & h-1 \end{array} \right),$$

où $h \in \mathbb{R}$ est un paramètre. Donner l'ensemble des solutions selon le paramètre h .

Devoirs pour mardi :

- Regarder les vidéos 2.5 - 2.7 du MOOC.
- Faire les petits quiz après les vidéos.
- MOOC 2.12 : faire quelques exercices en ligne (au moins une par sous-section, sauf les questions sur la décomposition LU).
- Poser ou répondre à une question sur Ed Discussion (facultatif mais recommandé).