

Algèbre linéaire

Chapitre 1 Systèmes d'équations linéaires

Simone Deparis

EPFL Lausanne – MATH

Semaine 1



Les équations linéaires I

Définition : Une **équation linéaire** en les variables $x_1, x_2, \dots, x_n$ est une équation de la forme

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b \quad (1)$$

où $a_1, a_2, \dots, a_n$ sont des nombres réels (ou rationnels, complexes, ...), appelés *coefficients* de l'équation linéaire, et b est un réel (ou rationnel, complexe, ...), appelé parfois *terme de droite*.

Exemples

- $3x_1 - 2x_2 + 7x_3 = 2$. Ici $n = 3$ et les coefficients de cette équation linéaire sont $a_1 = 3, a_2 = -2, a_3 = 7$.
- $\sqrt{2}x_1 - 4 - x_2 = \sqrt{3}x_2 + 18x_3$. En ajoutant d'un côté et de l'autre $4 - \sqrt{3}x_2 - 18x_3$, on obtient la forme $\sqrt{2}x_1 + (-1 - \sqrt{3})x_2 + (-18)x_3 = 4$, qui est une équation linéaire en $n = 3$ variables avec coefficients $a_1 = \sqrt{2}, a_2 = -(1 + \sqrt{3}), a_3 = -18$.

Les équations linéaires II

Contre-exemples

- $3x_1x_2 + 2x_2 = 3$ n'est pas de la forme (1).
- $2\sqrt{x_1} + 3x_2 = 7$ non plus.
- $\frac{1}{x_1} = 3$ n'est pas une équation linéaire. Ceci, même si on peut la mettre sous forme (1) en supposant que $x_1 \neq 0$ et en multipliant par x_1 .

Exercice 5

Parmi les équations suivantes, déterminer celles qui sont linéaires.

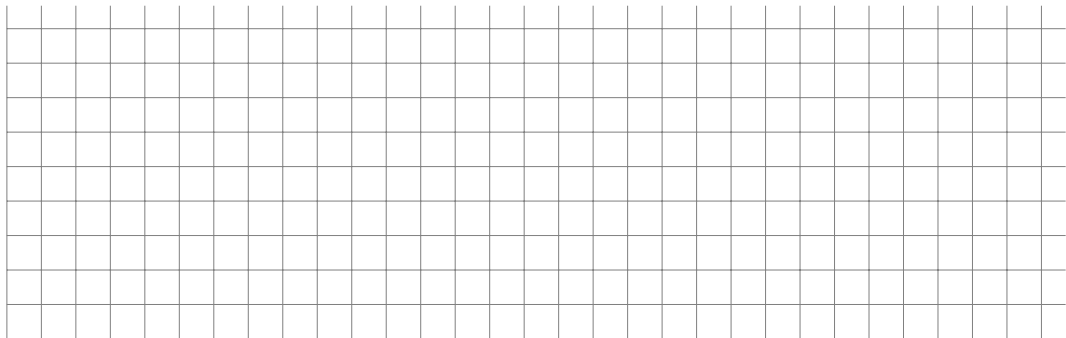
a) $x_1^2 + x_2^2 = 1$

b) $2^2 x_1 + 2^2 x_2 = 1$

c) $\sqrt{3}x_1 + (1 - \sqrt{2})x_2 + 3 = \pi x_1$

d) $3x_1 + 2x_2 + 4x_3 x_4 = 5$

e) $\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - 1\right)x_1 - 2 = 2x_1 + 4x_2 + \sqrt{3}x_3 + x_9$



Exercice 5, solution

Système d'équations linéaires I

Définition : Un **système d'équations linéaires** (ou **système linéaire**) est une collection d'une ou plusieurs équations linéaires en les mêmes variables $x_1, x_2, \dots, x_n$, dont les coefficients peuvent être différents.

$$\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

avec m équations, n variables
et coefficients a_{ij} et b_i pour $i = 1, \dots, m$ et $j = 1, \dots, n$.
 a_{ij}, b_i sont des nombres.

Système d'équations linéaires II

Exemples

1) $m = 2$ équations et $n = 3$ variables

$$\begin{array}{l} 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 2 \\ x_1 + 8x_2 + x_3 = 4 \end{array} \quad \text{avec} \quad \begin{array}{l} a_{11} = 3, \quad a_{12} = 2, \quad a_{13} = 4 \\ a_{21} = 1, \quad a_{22} = 8, \quad a_{23} = 1 \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{l} b_1 = 2 \\ b_2 = 4 \end{array}$$

2) $m = ______$ équations et $n = ______$ variables

$$\begin{array}{l} 3x_1 + \quad \quad 4x_3 = 5 \\ \quad \quad x_2 \quad \quad = 2 \end{array} \quad \text{avec} \quad \begin{array}{l} a_{11} = 3, \quad a_{12} = 0, \quad a_{13} = 4 \\ a_{21} = 0, \quad a_{22} = 1, \quad a_{23} = 0 \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{l} b_1 = 5 \\ b_2 = 2 \end{array}$$

3) $m = ______$ équations et $n = ______$ variables

$$\begin{array}{l} x_1 - \frac{1}{2}x_2 = -\frac{1}{2} \\ 2x_1 - x_2 = -5 \end{array} \quad \text{avec} \quad \begin{array}{l} a_{11} = 1, \quad a_{12} = -\frac{1}{2} \\ a_{21} = 2, \quad a_{22} = -1 \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{l} b_1 = -\frac{1}{2} \\ b_2 = -5 \end{array}$$

Système d'équations linéaires III

4) $m = __$ équations et $n = __$ variables

$$\begin{array}{l} -x_1 + 2x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 = 3 \end{array} \quad \text{avec} \quad \begin{array}{l} a_{11} = __, \quad a_{12} = __ \\ a_{21} = __, \quad a_{22} = __ \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{l} b_1 = __ \\ b_2 = __ \end{array}$$

5) $m = __$ équations et $n = __$ variables

$$\begin{array}{l} 3x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 + \frac{1}{3}x_2 = \frac{1}{3} \end{array} \quad \text{avec} \quad \begin{array}{l} a_{11} = __, \quad a_{12} = __ \\ a_{21} = __, \quad a_{22} = __ \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{l} b_1 = __ \\ b_2 = __ \end{array}$$

Solution d'un système linéaire I

Définition : Une **solution** d'un système d'équations linéaires est une liste ordonnée $(s_1, s_2, \dots, s_n)$ (n -uplet) de nombres réels (ou rationnels, complexes, ...) qui font que chaque égalité du système est vraie (est satisfaite) quand $x_1, \dots, x_n$ sont substitués par $s_1, \dots, s_n$ dans l'ordre.

On indique avec $\mathcal{S} = \{(s_1, \dots, s_n), (\bar{s}_1, \dots, \bar{s}_n), \dots\}$ l'ensemble des solutions d'un système d'équations linéaires donné.

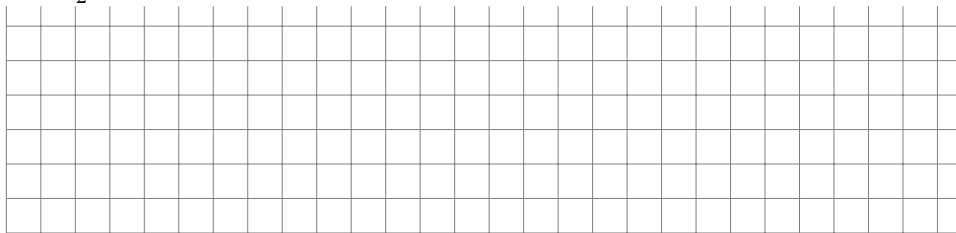
Exemples

a) $(-16, 1, 12)$ est-il une solution du système linéaire de l'exemple 1 ?

$$\begin{array}{lcl} 3(-16) + 2(1) + 4(12) \stackrel{?}{=} 2 & \Rightarrow & -48 + 2 + 48 \stackrel{\text{ok}}{=} 2 \\ (-16) + 8(1) + (12) \stackrel{?}{=} 4 & \Rightarrow & -16 + 8 + 12 \stackrel{\text{ok}}{=} 4 \end{array} \Rightarrow (-16, 1, 12) \in \mathcal{S}$$

Solution d'un système linéaire II

b) $(-1, \frac{1}{2}, 1)$ est-il aussi solution du système linéaire de l'exemple 1 ?

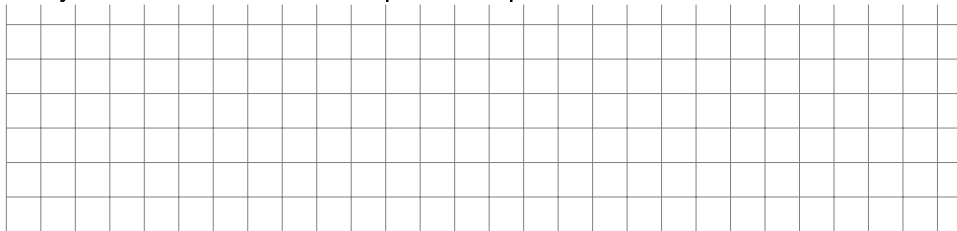


c) **Exercice :** vérifier que $(-2, 2, \frac{11}{4})$ est solution du système linéaire de l'exemple 2.

d) **Exercice :** $(-2, 1, \frac{11}{4})$ est-il aussi solution du système linéaire de l'exemple 2 ?

Solution d'un système linéaire III

- e) Le système linéaire de l'exemple 3 n'a pas de solution.

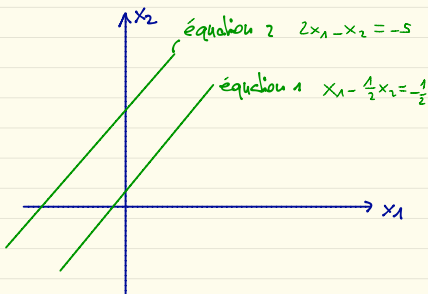


- f) **Exercice :** vérifier que $(2, 1)$ est une solution du système linéaire de l'exemple 4. Ce système a une seule et unique solution.

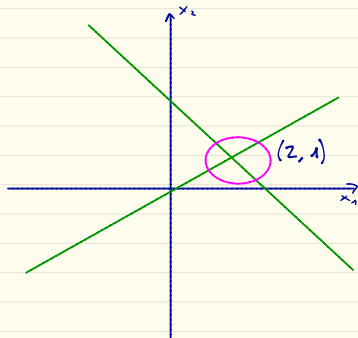
Solution d'un système linéaire IV

Interprétation géométrique

3)

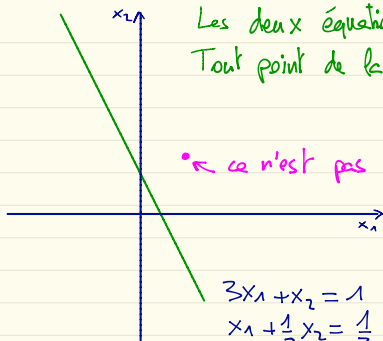


4)



Solution d'un système linéaire V

5)



Les deux équations représentent la même droite.
Tout point de la droite est solution du système linéaire.

• ← ce n'est pas une solution

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 &= 1 \\ x_1 + \frac{1}{3}x_2 &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Systèmes linéaires compatibles et incompatibles

Définition : Dans le cas où un système linéaire possède une solution (une ou plusieurs), on dit que le système linéaire est **compatible**. Autrement, on dit qu'il est **incompatible**.

De manière générale, il y a trois cas de figure :

- a) le système n'a pas de solution (incompatible) ;
- b) le système a une et une seule solution (compatible) ;
- c) le système a une infinité de solutions (compatible).

Matrice des coefficients et matrice augmentée I

Une matrice est un tableau rectangulaire de nombres.

Exemple

6)

$$\begin{array}{rcl} 3x_1 - 3x_2 - 2x_3 & = & -1 \\ 4x_1 - x_2 + 3x_3 & = & -1 \\ -2x_1 + 4x_2 + 3x_3 & = & 3 \end{array} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{array}{cccc} 3 & -3 & -2 & -1 \\ 4 & -1 & 3 & -1 \\ -2 & 4 & 3 & 3 \end{array}$$

La matrice $\begin{pmatrix} 3 & -3 & -2 \\ 4 & -1 & 3 \\ -2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ est appelée **matrice des coefficients**

La matrice $\begin{pmatrix} 3 & -3 & -2 & -1 \\ 4 & -1 & 3 & -1 \\ -2 & 4 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ est appelée **matrice augmentée**

du système linéaire.

Matrice des coefficients et matrice augmentée II

Définition : Une matrice de m lignes et n colonnes est dite de **taille** $m \times n$. On peut la représenter à l'aide de $m \cdot n$ coefficients.

Notation $A : m \times n$,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad A = (a_{ij})_{\substack{i=1\dots m \\ j=1\dots n}}$$

a_{ij} est l'élément de A qui se trouve à la i -ème ligne et j -ème colonne.

Une matrice suffit à résumer l'information d'un système linéaire. Dans l'exemple 6, la matrice des coefficients a une taille 3×3 , elle est carrée. La matrice augmentée a une taille 3×4 .

Questions du premier chapitre :

- Quand un système d'équations linéaires admet-il une solution ?
- Combien de solutions un système d'équations linéaires peut-t-il avoir ?
- Comment peut-on trouver toutes les solutions ?

Devoirs pour jeudi :

- Regarder les vidéos 1.1 - 1.5 du MOOC.
- Faire les petits quiz après les vidéos.
- Poser une question sur Ed Discussion, ou répondre à une question sur Ed Discussion.
- Environ 1 heure de vidéos, plus travail d'apprentissage.

Jeudi

Algèbre linéaire

Chapitre 1 Systèmes d'équations linéaires

Simone Deparis

EPFL Lausanne – MATH

Semaine 1



Question 1

Vrai/faux : Étant donné un système d'équations linéaires, alors il existe toujours une solution.

- A. vrai
- B. faux

Question 2

Vrai/faux : Si un système d'équations linéaires admet une solution, alors cette solution est unique.

- A. vrai
- B. faux

Question 3

Vrai/faux : Il existe un système d'équations linéaires qui admet exactement deux solutions.

- A. vrai
- B. faux

Exercice 6

- (i) Écrire les matrices augmentées correspondant aux systèmes linéaires suivants.
- (ii) Résoudre ces systèmes linéaires en utilisant des opérations élémentaires sur les lignes de ces matrices augmentées.

$$\text{a) } \begin{cases} x_1 - 2x_2 = -1 \\ -x_1 + 3x_2 = 3 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 12 \\ x_3 + 2x_1 - 4x_2 = -1 \\ x_2 + 2x_3 - 4x_1 = -8 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} 6x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 11 \\ -3x_1 + 2x_2 - x_3 = -4 \\ 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 9 \end{cases}$$

$$\text{d) } \begin{cases} x_1 - 3x_2 = 5 \\ 5x_3 - x_1 + x_2 = 2 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

Exercice 6, solution

Petite pause : Formation des groupes

Pendant les séances d'exercices vous serez amené·es à travailler sur des problèmes d'algèbre linéaire. Je vous demanderai de le faire par petits groupes.

Formez des groupes de 4-5 personnes.

Par groupe, apprenez à mieux connaître :

- vos camarades de classe
- la logistique du cours, où trouver les choses, comment fonctionne le cours, ...

Présentez-vous à vos camarades :

- 1 nom
- 2 sujet d'études,
- 3 où avez-vous obtenu votre maturité ?
- 4 petit 'fun fact' sur vous

Le nom de l'équipe va être distribué.

Travailler en groupe ?

Prenez 5 minutes pour réfléchir ensemble sur les aspects positifs et négatifs du travail en groupe.

Avantages

-
-
-
-

Inconvénients

-
-
-
-

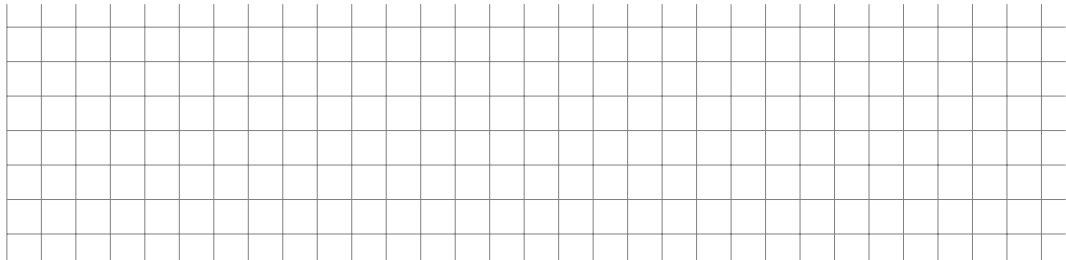
Inscription et contrat sur Moodle

- Inscription sur Moodle, activité "S'inscrire à un groupe".
- Remplissez le contrat d'équipe. À rendre sur Moodle comme premier "exercice" en groupe.

Exercice 7

- (i) Mettre les matrices suivantes sous forme échelonnée puis sous forme échelonnée réduite.
- (ii) Supposons que ces matrices sont des matrices augmentées de systèmes linéaires. Déterminer dans chaque cas si le système linéaire possède exactement une solution, une infinité de solutions, ou bien aucune.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -4 & 2 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 3 & 5 & 7 & 9 \\ 5 & 7 & 9 & 1 \end{pmatrix}$$



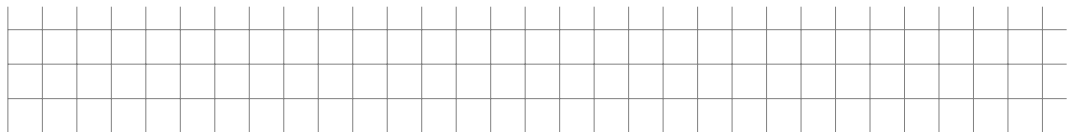
Exercice 7, solution

Exercice 8

Voici des matrices augmentées de quelques systèmes linéaires.

- (i) Vérifier si les matrices suivantes sont sous forme échelonnée ou sous forme échelonnée réduite.
- (ii) Identifier les variables de bases et les variables libres.
- (iii) Déterminer si les systèmes linéaires correspondants possèdent exactement une solution, une infinité de solutions, ou bien aucune.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



Exercice 8, solution

Question 4

Considérer le système d'équations linéaires suivant :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots \quad \quad \quad \cdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Soit $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ et $(\beta_1, \dots, \beta_n)$ deux solutions de ce système.
Alors

- A. $(\alpha_1 + \beta_1, \dots, \alpha_n + \beta_n)$ est aussi une solution du système.
- B. $(\alpha_1 + c(\alpha_1 - \beta_1), \dots, \alpha_n + c(\alpha_n - \beta_n))$ est aussi une solution du système pour chaque nombre réel c .
- C. $(\alpha_1 - \beta_1, \dots, \alpha_n - \beta_n)$ est aussi une solution du système.

Devoirs pour mardi prochain :

- Regarder les vidéos 1.6 - 1.8 du MOOC (regarder les vidéos et faire les petits quiz après les vidéos).
- Poser des questions sur Ed Discussion !