Durée : 60 minutes

Algèbre linéaire
Test intermédiaire
CGC/EL/MX
Automne 2024

Réponses

Pour les questions à **choix multiple**, on comptera :

$+3$ points si la réponse est correcte,

0 point si la question n'est pas répondue ou s'il y a plusieurs réponses,

-1 point si la réponse est incorrecte.

Pour les questions de type **vrai-faux**, on comptera :

$+1$ point si la réponse est correcte,

0 point si la question n'est pas répondue ou s'il y a plusieurs réponses,

-1 point si la réponse est incorrecte.

Notation

– Pour une matrice A, a_{ij} désigne l'élément situé sur la ligne i et la colonne j de la matrice.
– Pour un vecteur $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, x_i désigne la i-ème composante de $\vec{x}$.
– I_m désigne la matrice identité de taille $m \times m$.
– $\mathbb{P}_n$ désigne l'espace vectoriel des polynômes réels de degré inférieur ou égal à n.
– $M_{m,n}(\mathbb{R})$ désigne l'espace vectoriel des matrices de taille $m \times n$ à coefficients réels.

Première partie, questions à choix multiple

Pour chaque question marquer la case correspondante à la réponse correcte sans faire de ratures. Il n'y a qu'**une seule** réponse correcte par question.

Question 1 : Soient

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \quad \text{et} \quad \mathcal{C} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix} \right\}$$

deux bases de $\mathbb{R}^3$. Soit $P = P^{\mathcal{C}\mathcal{B}}$ la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ vers la base $\mathcal{C}$, telle que $[\vec{x}]_{\mathcal{C}} = P[\vec{x}]_{\mathcal{B}}$ pour tout $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$. Alors la deuxième ligne de P est

- ☐ $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
- ☐ $\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$
- ☐ $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
- ■ $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

Question 2 : Soit $\mathcal{B} = \{2-t,\ t+t^2,\ -1+t^3,\ -1-t+2t^2\}$ une base de $\mathbb{P}_3$. La quatrième coordonnée du polynôme $p(t) = t + 2t^2 + 3t^3$ par rapport à la base $\mathcal{B}$ est égale à

- ☐ -7
- ☐ $\frac{1}{7}$
- ■ $-\frac{1}{7}$
- ☐ 3

Question 3 : Soit

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & -4 \\ -2 & -2 & 2 & 0 \\ -3 & -1 & 0 & 2 \\ 5 & 3 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Calculer la factorisation LU de la matrice A (en utilisant *seulement* des opérations élémentaires sur les lignes consistant à additionner un multiple d'une ligne à une autre ligne en *dessous*). Alors l'élément ℓ_{43} de la matrice L est donné par

- ☐ $\ell_{43} = \frac{7}{3}$
- ■ $\ell_{43} = -\frac{7}{3}$
- ☐ $\ell_{43} = \frac{3}{7}$
- ☐ $\ell_{43} = -\frac{3}{7}$

Question 4 : Soit $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ l'application linéaire définie par

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x-y \\ x-y \\ -5x+6y \\ x+y \end{bmatrix}.$$

Alors

- ☐ T est injective et surjective
- ☐ T est surjective mais pas injective
- ■ T est injective mais pas surjective
- ☐ T n'est ni injective ni surjective

Question 5 : Soit

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & \sqrt{3} & \pi & 3 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & \pi & 3 & \sqrt{2} \\ \sqrt{3} & 1 & \pi & 3 & \sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

Alors

□ $\det(A) = \sqrt{6}\pi$ □ $\det(A) = 12\pi$ □ $\det(A) = 0$ ■ $\det(A) = -6\pi$

Question 6 : Soit

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Alors l'inverse $B = A^{-1}$ de la matrice A est tel que

□ $b_{41} = \frac{1}{3}$ □ $b_{33} = -\frac{1}{13}$ ■ $b_{33} = \frac{4}{39}$ □ $b_{43} = \frac{2}{3}$

Question 7 : Soit W l'espace vectoriel des matrices symétriques de taille 2×2 et soit $T : \mathbb{P}_2 \to W$ l'application linéaire définie par

$$T(a+bt+ct^2) = \begin{bmatrix} a & b-c \\ b-c & a+b+c \end{bmatrix} \qquad \text{pour tout } a,b,c \in \mathbb{R}.$$

Soient

$$\mathcal{B} = \{1, 1-t, t+t^2\} \qquad \text{et} \qquad \mathcal{C} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

des bases de $\mathbb{P}_2$ et W respectivement. La matrice A associée à T par rapport à la base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{P}_2$ et la base $\mathcal{C}$ de W, telle que $[T(p)]_{\mathcal{C}} = A[p]_{\mathcal{B}}$ pour tout $p \in \mathbb{P}_2$, est

□ $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ □ $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ ■ $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ □ $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

Question 8 : Le système d'équations linéaires

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 5x_3 - 4x_4 = 0 \\ \phantom{x_1 + {}} x_2 + 2x_3 + x_4 = 7 \\ \phantom{x_1 + {}} x_2 + 3x_3 - 5x_4 = -4 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 1 \end{cases}$$

possède une solution unique telle que

□ $x_1 = 3$ ■ $x_1 = -3$ □ $x_1 = -2$ □ $x_1 = 2$

Deuxième partie, questions de type Vrai ou Faux

Pour chaque question, marquer (sans faire de ratures) la case VRAI si l'affirmation est **toujours vraie** ou la case FAUX si elle **n'est pas toujours vraie** (c'est-à-dire si elle est parfois fausse).

Question 9 : Si A et B sont deux matrices inversibles de taille $n \times n$ telles que $A+B$ n'est pas la matrice nulle, alors $A+B$ est aussi inversible.

□ VRAI ■ FAUX

Question 10 : Soit $\{\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_m\}$ une base de $\mathbb{R}^m$. Si A est une matrice de taille $m \times n$ telle que l'équation $A\vec{x} = \vec{b}_k$ possède au moins une solution pour tout $k = 1, \ldots, m$, alors $\mathrm{Col}(A) = \mathbb{R}^m$.

■ VRAI □ FAUX

Question 11 : Soit A une matrice de taille $m \times n$ avec $m < n$. Si la forme échelonnée réduite de A possède exactement k lignes nulles, alors l'ensemble des solutions du système homogène $A\vec{x} = \vec{0}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ de dimension $n-k$.

□ VRAI ■ FAUX

Question 12 : Soit A une matrice de taille $n \times n$ et soit $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ l'application linéaire définie par $T(\vec{x}) = A\vec{x}$, pour tout $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$. Si A est telle que $A^5 = 0$, alors T est surjective.

□ VRAI ■ FAUX

Question 13 : Soient V et W deux espaces vectoriels et soit $T : V \to W$ une application linéaire.
Si $\dim(\mathrm{Ker}\, T) = \dim V$, alors $\mathrm{Im}\, T = \{\vec{0}_W\}$.

■ VRAI □ FAUX

Question 14 : Soit q un polynôme de degré 3 quelconque. Alors l'ensemble

$$\{p \in \mathbb{P}_3 : q(0) - p(0) = 0\}$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{P}_3$.

□ VRAI ■ FAUX

Question 15 : Soit $A \in M_{4,4}(\mathbb{R})$ une matrice de rang 3. Si $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ sont des vecteurs linéairement indépendants dans $\mathbb{R}^4$, alors $A\vec{u}$, $A\vec{v}$, $A\vec{w}$ sont linéairement indépendants dans $\mathbb{R}^4$.

□ VRAI ■ FAUX

Question 16 : Soit W le sous-espace vectoriel de $\mathbb{P}_5$ engendré par $p_1, p_2, p_3, p_4 \in \mathbb{P}_5$. Si $\dim(W) = 4$, alors il existe deux polynômes $p_5, p_6 \in \mathbb{P}_5$ tels que l'ensemble $\mathcal{B} = \{p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6\}$ est une base de $\mathbb{P}_5$.

■ VRAI □ FAUX