

# Algèbre linéaire

## Test intermédiaire

### CGC/EL/MX

### Automne 2024

---

## Enoncé

---

Pour les questions à **choix multiple**, on comptera :

- +3 points si la réponse est correcte,
- 0 point si la question n'est pas répondue ou s'il y a plusieurs réponses,
- −1 point si la réponse est incorrecte.

Pour les questions de type **vrai-faux**, on comptera :

- +1 point si la réponse est correcte,
- 0 point si la question n'est pas répondue ou s'il y a plusieurs réponses,
- −1 point si la réponse est incorrecte.

## Notation

- Pour une matrice  $A$ ,  $a_{ij}$  désigne l'élément situé sur la ligne  $i$  et la colonne  $j$  de la matrice.
- Pour un vecteur  $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ ,  $x_i$  désigne la  $i$ -ème composante de  $\vec{x}$ .
- $I_m$  désigne la matrice identité de taille  $m \times m$ .
- $\mathbb{P}_n$  désigne l'espace vectoriel des polynômes réels de degré inférieur ou égal à  $n$ .
- $M_{m,n}(\mathbb{R})$  désigne l'espace vectoriel des matrices de taille  $m \times n$  à coefficients réels.

## Première partie, questions à choix multiple

Pour chaque question marquer la case correspondante à la réponse correcte sans faire de ratures. Il n'y a qu'une seule réponse correcte par question.

**Question 1 :** Soient

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \quad \text{et} \quad \mathcal{C} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix} \right\}$$

deux bases de  $\mathbb{R}^3$ . Soit  $P = P^{\mathcal{C}\mathcal{B}}$  la matrice de passage de la base  $\mathcal{B}$  vers la base  $\mathcal{C}$ , telle que  $[\vec{x}]_{\mathcal{C}} = P[\vec{x}]_{\mathcal{B}}$  pour tout  $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ . Alors la deuxième ligne de  $P$  est

☐  $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$   
☐  $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

☐  $\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$   
☐  $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

**Question 2 :** Soit  $\mathcal{B} = \{2-t, t+t^2, -1+t^3, -1-t+2t^2\}$  une base de  $\mathbb{P}_3$ . La quatrième coordonnée du polynôme  $p(t) = t + 2t^2 + 3t^3$  par rapport à la base  $\mathcal{B}$  est égale à

☐  $-7$

☐  $\frac{1}{7}$

☐  $-\frac{1}{7}$

☐  $3$

**Question 3 :** Soit

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & -4 \\ -2 & -2 & 2 & 0 \\ -3 & -1 & 0 & 2 \\ 5 & 3 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Calculer la factorisation  $LU$  de la matrice  $A$  (en utilisant *seulement* des opérations élémentaires sur les lignes consistant à additionner un multiple d'une ligne à une autre ligne en *dessous*). Alors l'élément  $\ell_{43}$  de la matrice  $L$  est donné par

☐  $\ell_{43} = \frac{7}{3}$

☐  $\ell_{43} = -\frac{7}{3}$

☐  $\ell_{43} = \frac{3}{7}$

☐  $\ell_{43} = -\frac{3}{7}$

**Question 4 :** Soit  $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$  l'application linéaire définie par

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x-y \\ x-y \\ -5x+6y \\ x+y \end{bmatrix}.$$

Alors

☐  $T$  est injective et surjective

☐  $T$  est surjective mais pas injective

☐  $T$  est injective mais pas surjective

☐  $T$  n'est ni injective ni surjective

**Question 5 :** Soit

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & \sqrt{3} & \pi & 3 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & \pi & 3 & \sqrt{2} \\ \sqrt{3} & 1 & \pi & 3 & \sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

Alors

☐  $\det(A) = \sqrt{6}\pi$

☐  $\det(A) = 12\pi$

☐  $\det(A) = 0$

☐  $\det(A) = -6\pi$

**Question 6 :** Soit

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Alors l'inverse  $B = A^{-1}$  de la matrice  $A$  est tel que

☐  $b_{41} = \frac{1}{3}$

☐  $b_{33} = -\frac{1}{13}$

☐  $b_{33} = \frac{4}{39}$

☐  $b_{43} = \frac{2}{3}$

**Question 7 :** Soit  $W$  l'espace vectoriel des matrices symétriques de taille  $2 \times 2$  et soit  $T: \mathbb{P}_2 \rightarrow W$  l'application linéaire définie par

$$T(a + bt + ct^2) = \begin{bmatrix} a & b - c \\ b - c & a + b + c \end{bmatrix} \quad \text{pour tout } a, b, c \in \mathbb{R}.$$

Soient

$$\mathcal{B} = \{1, 1 - t, t + t^2\} \quad \text{et} \quad \mathcal{C} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

des bases de  $\mathbb{P}_2$  et  $W$  respectivement. La matrice  $A$  associée à  $T$  par rapport à la base  $\mathcal{B}$  de  $\mathbb{P}_2$  et la base  $\mathcal{C}$  de  $W$ , telle que  $[T(p)]_{\mathcal{C}} = A[p]_{\mathcal{B}}$  pour tout  $p \in \mathbb{P}_2$ , est

☐  $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

☐  $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

☐  $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

☐  $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

**Question 8 :** Le système d'équations linéaires

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 5x_3 - 4x_4 = 0 \\ x_2 + 2x_3 + x_4 = 7 \\ x_2 + 3x_3 - 5x_4 = -4 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 1 \end{cases}$$

possède une solution unique telle que

☐  $x_1 = 3$

☐  $x_1 = -3$

☐  $x_1 = -2$

☐  $x_1 = 2$

## Deuxième partie, questions de type Vrai ou Faux

Pour chaque question, marquer (sans faire de ratures) la case VRAI si l'affirmation est **toujours vraie** ou la case FAUX si elle **n'est pas toujours vraie** (c'est-à-dire si elle est parfois fausse).

**Question 9 :** Si  $A$  et  $B$  sont deux matrices inversibles de taille  $n \times n$  telles que  $A + B$  n'est pas la matrice nulle, alors  $A + B$  est aussi inversible.

☐ VRAI      ☐ FAUX

**Question 10 :** Soit  $\{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_m\}$  une base de  $\mathbb{R}^m$ . Si  $A$  est une matrice de taille  $m \times n$  telle que l'équation  $A\vec{x} = \vec{b}_k$  possède au moins une solution pour tout  $k = 1, \dots, m$ , alors  $\text{Col}(A) = \mathbb{R}^m$ .

☐ VRAI      ☐ FAUX

**Question 11 :** Soit  $A$  une matrice de taille  $m \times n$  avec  $m < n$ . Si la forme échelonnée réduite de  $A$  possède exactement  $k$  lignes nulles, alors l'ensemble des solutions du système homogène  $A\vec{x} = \vec{0}$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^n$  de dimension  $n - k$ .

☐ VRAI      ☐ FAUX

**Question 12 :** Soit  $A$  une matrice de taille  $n \times n$  et soit  $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  l'application linéaire définie par  $T(\vec{x}) = A\vec{x}$ , pour tout  $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ . Si  $A$  est telle que  $A^5 = 0$ , alors  $T$  est surjective.

☐ VRAI      ☐ FAUX

**Question 13 :** Soient  $V$  et  $W$  deux espaces vectoriels et soit  $T : V \rightarrow W$  une application linéaire. Si  $\dim(\text{Ker } T) = \dim V$ , alors  $\text{Im } T = \{\vec{0}_W\}$ .

☐ VRAI      ☐ FAUX

**Question 14 :** Soit  $q$  un polynôme de degré 3 quelconque. Alors l'ensemble

$$\{p \in \mathbb{P}_3 : q(0) - p(0) = 0\}$$

est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{P}_3$ .

☐ VRAI      ☐ FAUX

**Question 15 :** Soit  $A \in M_{4,4}(\mathbb{R})$  une matrice de rang 3. Si  $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$  sont des vecteurs linéairement indépendants dans  $\mathbb{R}^4$ , alors  $A\vec{u}, A\vec{v}, A\vec{w}$  sont linéairement indépendants dans  $\mathbb{R}^4$ .

☐ VRAI      ☐ FAUX

**Question 16 :** Soit  $W$  le sous-espace vectoriel de  $\mathbb{P}_5$  engendré par  $p_1, p_2, p_3, p_4 \in \mathbb{P}_5$ . Si  $\dim(W) = 4$ , alors il existe deux polynômes  $p_5, p_6 \in \mathbb{P}_5$  tels que l'ensemble  $\mathcal{B} = \{p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6\}$  est une base de  $\mathbb{P}_5$ .

☐ VRAI      ☐ FAUX