Algèbre linéaire — Série 9

CGC, EL, MX — 14 novembre 2024

En classe

1. Soit $W = \mathrm{Vect}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par les vecteurs

$$\vec{v}_1 = (3,2,9)\,, \quad \vec{v}_2 = (-1,3,8)\,, \quad \vec{v}_3 = (4,1,7)\,.$$

Utiliser la matrice A dont les lignes sont $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ et $\vec{v}_3$ pour calculer $\dim W$ et trouver une base de W. Déterminer ensuite lesquels des vecteurs suivants appartiennent à W:

$$(1,4,7)\,, \qquad (7,-1,4)\,, \qquad (10,-5,25)\,, \qquad (-5,10,25)\,.$$

2. Déterminer la matrice de l'application linéaire $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ donnée par

$$T(x,y,z,u) = (x+3y-5z+7u\,,\, x-y+u\,,\, 3y-z)\,,$$

a) par rapport aux bases canoniques de $\mathbb{R}^4$ et $\mathbb{R}^3$,

b) par rapport à la base $\mathcal{B} = \big\{(1,0,0,0)\,,\,(1,1,0,0)\,,\,(1,1,1,0)\,,\,(1,1,1,1)\big\}$ de $\mathbb{R}^4$ et la base $\mathcal{B}' = \big\{(1,0,1)\,,\,(0,1,1)\,,\,(0,0,1)\big\}$ de $\mathbb{R}^3$.

3. Considérer l'application linéaire $T : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_2$ définie par $T(p) = p' + 3p$.

a) Déterminer la matrice associée à T par rapport à la base canonique de $\mathbb{P}_2$ et calculer son rang.

b) Déterminer la dimension et donner une base du noyau et de l'image de T.

c) Déterminer la matrice associée à T par rapport à la base $\mathcal{B} = \big\{1\,,\,1+x\,,\,1+x+x^2\big\}$.

4. Soit $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ l'application linéaire définie par $T(x,y) = (2x+y,\ x-y,\ x,\ -x+2y)$.
Soit $\mathcal{B} = \big\{(1,0,0,0),(1,1,0,0),(1,1,1,0),(1,1,1,1)\big\}$ une base de $\mathbb{R}^4$ et $\mathcal{E} = \big\{(1,0),(0,1)\big\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$.
La matrice de l'application linéaire T par rapport aux bases $\mathcal{E}$ de $\mathbb{R}^2$ et $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^4$ est

☐ $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \\ 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ ☐ $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 2 & -2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ ☐ $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ ☐ $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

5. Soit $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire définie par $T(x,y,z) = (x+2y+3z,\ -x+3y+2z,\ y+z)$ et soit $\vec{u} = (0,5,1)$. Alors

☐ $\vec{u} \in \mathrm{Im}\,T$, $\vec{u} \in \mathrm{Ker}\,T$ ☐ $\vec{u} \notin \mathrm{Im}\,T$, $\vec{u} \in \mathrm{Ker}\,T$ ☐ $\vec{u} \in \mathrm{Im}\,T$, $\vec{u} \notin \mathrm{Ker}\,T$ ☐ $\vec{u} \notin \mathrm{Im}\,T$, $\vec{u} \notin \mathrm{Ker}\,T$

6. Déterminer si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses et justifier votre réponse:

a) Si A est une matrice non nulle de taille 5×3, alors $\dim(\mathrm{Lgn}A) \geqslant 2$.

b) Soit A une matrice de taille $m\times n$. Si B est une matrice obtenue en effectuant des opérations élémentaires sur les lignes de A, alors $\mathrm{Col}\,B = \mathrm{Col}\,A$.

c) Soit V un espace vectoriel non nul et $T : V \to V$ est une application linéaire.
Si $\vec{u},\vec{v} \in V$ sont tels que $T(\vec{u}) = T(\vec{v})$, alors $\vec{u} - \vec{v} \in \mathrm{Ker}\,T$.

➥ **Tourner la page s. v. p.**

Test intermédiaire (chapitres 1–4, séries 1–9):
Date: mardi 19 novembre

A domicile

7. Soit $W = \text{Vect}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par les vecteurs

$$\vec{v}_1 = (3,2,8), \quad \vec{v}_2 = (5,-6,4), \quad \vec{v}_3 = (2,3,7).$$

Utiliser la matrice A dont les lignes sont $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ et $\vec{v}_3$ pour calculer $\dim W$ et trouver une base de W. Déterminer ensuite lesquels des vecteurs suivants appartiennent à W:

$$(1,2,3), \qquad (1,3,5), \qquad (1,5,7), \qquad (8,-9,10), \qquad (9,-8,10), \qquad (10,-9,8).$$

8. Soit A une matrice de taille $m \times n$. Démontrer l'équivalence suivante:

$A\vec{x} = \vec{b}$ est consistant pour tout $\vec{b} \in \mathbb{R}^m \iff A^T\vec{x} = \vec{0}$ n'admet que la solution triviale.

9. Déterminer lesquelles des applications suivantes sont linéaires:

a) $\begin{aligned} T : \mathbb{P}_n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ p &\longmapsto p(0) \end{aligned}$ **b)** $\begin{aligned} T : M_{6,3}(\mathbb{R}) &\longrightarrow M_{3,6}(\mathbb{R}) \\ A &\longmapsto A^T \end{aligned}$ **c)** $\begin{aligned} T : M_{2,2}(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ A &\longmapsto \det(A) \end{aligned}$

10. Déterminer la matrice de l'application linéaire $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ donnée par

$$T(x,y,z,u) = (x-2y+3z-4u\,,\, x-2u\,,\, y+z),$$

a) par rapport aux bases canoniques de $\mathbb{R}^4$ et $\mathbb{R}^3$,

b) par rapport à la base $\mathcal{B} = \{(1,0,0,0)\,,\,(1,1,0,0)\,,\,(1,0,1,0)\,,\,(1,0,0,1)\}$ de $\mathbb{R}^4$ et la base $\mathcal{B}' = \{(0,0,1)\,,\,(0,1,1)\,,\,(1,1,1)\}$ de $\mathbb{R}^3$.

11. Considérer l'application linéaire $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ définie par

$$T(x,y,z) = (2x-2y+4z\,,\, 5x-4y+7z\,,\, 3x-2y+3z\,,\, x-y+2z).$$

a) Donner la matrice A_T de T par rapport aux bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^4$ et calculer son rang.

b) Déterminer le noyau et l'image de l'application linéaire T.

12. Considérer l'application linéaire $T : \mathbb{P}_3 \to \mathbb{P}_3$ définie par $T(p) = p' + p''$.

a) Déterminer la matrice associée à T par rapport à la base canonique de $\mathbb{P}_3$ et calculer son rang.

b) Déterminer la dimension et donner une base du noyau et de l'image de T.

c) Déterminer la matrice associée à T par rapport à la base $\mathcal{B} = \{1\,,\,1+x\,,\,x^2\,,\,1+x+x^2+x^3\}$.

13. Considérer l'application linéaire $T : M_{2,2}(\mathbb{R}) \to M_{2,2}(\mathbb{R})$ donnée par

$$T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2c & a+c \\ b-2c & d \end{bmatrix}.$$

a) Déterminer la matrice $A_T \in M_{4,4}(\mathbb{R})$ de T par rapport à la base canonique de $M_{2,2}(\mathbb{R})$.

b) Déterminer la dimension et donner une base de l'image et le noyau de l'application linéaire T.

14. **a)** Montrer que l'application $T : M_{2,2}(\mathbb{R}) \to M_{2,2}(\mathbb{R})$ définie par

$$T(A) = A + A^T$$

est linéaire.

b) Déterminer la matrice $A_T \in M_{4,4}(\mathbb{R})$ de T par rapport à la base canonique de $M_{2,2}(\mathbb{R})$.

c) Déterminer la dimension et donner une base du noyau et de l'image de T.

Indication: Utiliser l'exercice 4 de la série 8.