

### En classe

1. Donner une base et la dimension du sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^4$  formé des solutions du système d'équations linéaires homogènes

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x + y + u = 0 \end{cases}$$

2. Donner une base et la dimension des sous-espaces vectoriels de  $\mathbb{R}^3$  de l'exercice 4a) de la série 7:

$$W_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = y\} \quad \text{et} \quad W_2 = \{(x, y, 2x - y) \in \mathbb{R}^3 : x, y \in \mathbb{R}\}$$

3. a) Calculer le rang de la matrice  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & -1 & -3 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & -3 & 2 & 7 \end{bmatrix}$ .

b) Donner une base de  $\text{Lgn}(A)$ , le sous-espace des lignes de la matrice  $A$ .

c) Donner une base de  $\text{Col}(A)$ , le sous-espace des colonnes de la matrice  $A$ .

d) Déterminer la dimension et donner une base de  $\text{Nul}(A)$ , le sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^5$  engendré par les solutions du système d'équations linéaires homogènes  $A\vec{x} = \vec{0}$ .

4. Déterminer la dimension et donner une base de  $\text{Lgn}(A)$ ,  $\text{Nul}(A)$ ,  $\text{Col}(A)$ ,  $\text{Lgn}(B)$ ,  $\text{Nul}(B)$  et  $\text{Col}(B)$  où

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

5. L'ensemble des solutions du système linéaire

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_3 = 0 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$

est:

☐ l'ensemble vide

☐ un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^3$  de dimension 1

☐ un ensemble contenant un seul point

☐ un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^3$  de dimension 2

6. Soit  $a \in \mathbb{R}$ . L'ensemble de polynômes  $\{7t^2, 4 + 2t + t^2, at + 2\}$  n'est pas une base de  $\mathbb{P}_2$  si

☐  $a = -1$

☐  $a = 0$

☐  $a = 1$

☐  $a = 4$

7. Soit  $\mathcal{B} = \{1 - t^2, t - t^2, 2 - 2t + t^2\}$  une base de  $\mathbb{P}_2$ .

Le vecteur des coordonnées du polynôme  $p(t) = 3 - 2t^2$  dans la base  $\mathcal{B}$  est

☐  $[p]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

☐  $[p]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

☐  $[p]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

☐  $[p]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

➡ Tourner la page s. v. p.

8. Soit  $A$  une matrice de taille  $m \times n$  et  $E$  une matrice élémentaire de taille  $m \times m$ .  
Déterminer si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses et justifier votre réponse:  
**a)**  $\text{Col}(EA) = \text{Col}(A)$       **b)**  $\text{Lgn}(EA) = \text{Lgn}(A)$       **c)**  $\text{Nul}(EA) = \text{Nul}(A)$
9. Déterminer si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses et justifier votre réponse:  
**a)** Si les vecteurs ligne de la matrice  $A$  sont linéairement indépendants de même que les vecteurs colonne de  $A$ , alors la matrice  $A$  est carrée.  
**b)** Si  $A$  est une matrice de taille  $m \times n$  telle que  $\text{rang}(A) = m$ , alors l'application linéaire  $\vec{x} \mapsto A\vec{x}$  est injective.  
**c)** Si  $A$  est une matrice de taille  $m \times n$  telle que l'application linéaire  $\vec{x} \mapsto A\vec{x}$  est surjective, alors  $\text{rang}(A) = m$ .

## A domicile

10. Donner une base et la dimension du sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^4$  formé des solutions du système d'équations linéaires homogènes

$$\begin{cases} x + 2y + 3z + 4u = 0 \\ 4x + 5y + 6z + 7u = 0 \\ 4x + 2y - 2u = 0 \\ x - y - 3z - 5u = 0 \end{cases}$$

11. Déterminer la dimension du sous-espace vectoriel  $W$  de  $F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  engendré par les fonctions

$$f_1(x) = 1, \quad f_2(x) = \cos(2x), \quad f_3(x) = \cos^2(x).$$

12. **a)** Montrer que les polynômes suivants sont linéairement indépendants:

$$p_1(x) = x + 1, \quad p_2(x) = x^2 + 2, \quad p_3(x) = x^2 + x$$

- b)** Montrer que l'ensemble  $\{p_1, p_2, p_3\}$  est une base de l'espace vectoriel  $\mathbb{P}_2$ .

- c)** Calculer les coefficients du polynôme  $p(x) = x^2 + 5$  par rapport à cette base.

- d)** Compléter cette base de  $\mathbb{P}_2$  pour obtenir une base de  $\mathbb{P}_3$ .

13. Déterminer les valeurs du paramètre  $\lambda \in \mathbb{R}$  pour lesquelles les polynômes

$$(\lambda^2 - 1)x^3 + x, \quad x + \lambda \quad \text{et} \quad (\lambda + 1)x^3 + 1$$

sont linéairement indépendants. Est-ce qu'ils forment une base de l'espace vectoriel  $\mathbb{P}_3$ ?

14. **a)** Déterminer le rang de la matrice  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & -3 \\ 1 & 0 & 2 & 5 & -3 \end{bmatrix}$ .

- b)** Donner une base de  $\text{Lgn}(A)$ .

- c)** Donner une base de  $\text{Col}(A)$ .

- d)** Déterminer la dimension et donner une base de  $\text{Nul}(A)$ .

15. Déterminer la dimension et donner une base de  $\text{Lgn}(A)$ ,  $\text{Nul}(A)$ ,  $\text{Col}(A)$ ,  $\text{Lgn}(B)$ ,  $\text{Nul}(B)$ ,  $\text{Col}(B)$ ,  $\text{Lgn}(C)$ ,  $\text{Nul}(C)$  et  $\text{Col}(C)$  où

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 & 0 & 9 \\ 2 & 3 & 5 & 1 & 8 \\ 3 & 1 & 4 & 6 & 5 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$