

1. $A^2, B^2, BC, CA, CB, C^2$ pas possible,

$$AB = \begin{bmatrix} -4 & 5 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}, AC = \begin{bmatrix} 22 \\ 12 \end{bmatrix}, BA = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 13 \\ 2 & -1 & 4 \\ -1 & -3 & -5 \end{bmatrix}, AA^T = \begin{bmatrix} 35 & 19 \\ 19 & 21 \end{bmatrix}, A^T A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 13 \\ 1 & 10 & 11 \\ 13 & 11 & 41 \end{bmatrix},$$

$$BB^T = \begin{bmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, B^T B = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}, CC^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}, C^T C = [14].$$

2. $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$, B n'est pas inversible, $C^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{7} & \frac{1}{7} \end{bmatrix}$.

3. a) $I_2 \xrightarrow{L_2 \rightarrow L_2 + 5L_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$ b) pas élémentaire c) $I_2 \xrightarrow{L_2 \rightarrow \sqrt{2}L_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$

d) pas élémentaire e) $I_3 \xrightarrow{L_2 \rightarrow L_2 + 8L_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ f) $I_3 \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

4. $b_{21} = -4$

5. a) V b) F c) V d) V e) F

6. a) V b) F c) V d) V d) V

7. CA, BC, A^2 : pas possible,

$$AB = \begin{bmatrix} 5 & 5 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & -1 & -3 \\ -3 & 6 & 1 & 5 \end{bmatrix}, BA = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 4 \\ -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}, AC = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix},$$

$$CB = \begin{bmatrix} -3 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, C + C^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, AA^T = \begin{bmatrix} 14 & -2 & -5 & 13 \\ -2 & 1 & 3 & -5 \\ -5 & 3 & 14 & -14 \\ 13 & -5 & -14 & 26 \end{bmatrix},$$

$$A^T A = \begin{bmatrix} 5 & 8 & 1 \\ 8 & 39 & 8 \\ 1 & 8 & 11 \end{bmatrix}, A^T A + C = \begin{bmatrix} 5 & 9 & 0 \\ 8 & 39 & 9 \\ 1 & 8 & 11 \end{bmatrix}, C^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, C^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = O,$$

$$A(C + C^2) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}, (C + C^2)^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

8. Par exemple $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

10. $A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 4 & -6 \\ -1 & 8 & -13 \\ 1 & -5 & 8 \end{bmatrix}, \quad B^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -3 & -1 & 9 \\ 2 & 0 & -4 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad C \text{ pas inversible.}$

11. **a)** $E_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ **b)** $E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ **c)** $E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ **d)** $E_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

12. **a)** $A \sim I_3$

13. **a)** $A \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -18 & -16 \\ 0 & 1 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = R$