Algèbre linéaire — Série 5

CGC, EL, MX — 10 octobre 2024

En classe

1. Considérer les matrices

$$A=\begin{bmatrix}1 & 3 & 5\\ 2 & -1 & 4\end{bmatrix},\qquad B=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix},\qquad C=\begin{bmatrix}1\\ 2\\ 3\end{bmatrix}.$$

Calculer (lorsque c'est possible):

$$A^2,\ AB,\ AC,\ BA,\ B^2,\ BC,\ CA,\ CB,\ C^2,\ AA^T,\ A^TA,\ BB^T,\ B^TB,\ CC^T,\ C^TC.$$

2. Déterminer si les matrices suivantes sont inversibles:

$$A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ -1 & 1 & 0\\ -1 & 1 & 1\end{bmatrix},\qquad B=\begin{bmatrix}1 & -3 & 4\\ 2 & 0 & 2\\ 4 & 3 & 1\end{bmatrix},\qquad C=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 3 & 0 & 0\\ 1 & 3 & 5 & 0\\ 1 & 3 & 5 & 7\end{bmatrix}.$$

Calculer leur inverse lorsque cela est possible.

3. Parmi les matrices carrées suivantes, déterminer celles qui sont des matrices élémentaires. Décrire l'opération élémentaire associée:

a) $\begin{bmatrix}1 & 0\\ 5 & 1\end{bmatrix}$ **b)** $\begin{bmatrix}5 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$ **c)** $\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & \sqrt{2}\end{bmatrix}$ **d)** $\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$ **e)** $\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 8\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$ **f)** $\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}$

4. Soit $B=A^{-1}$ l'inverse de la matrice

$$A=\begin{bmatrix}-1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & -2\\ 2 & 2 & -1\end{bmatrix}.$$

Alors le coefficient b_{21} de la matrice B est égal à

☐ $b_{21}=-4$ ☐ $b_{21}=-2$ ☐ $b_{21}=-1$ ☐ $b_{21}=2$

5. Soient A et B deux matrices telles que le produit AB est défini.

Déterminer si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses et justifier votre réponse:

a) Si la matrice $AB+BA$ est définie, alors les matrices A et B sont carrées de même taille.

b) Si la première colonne de A ne contient que des zéros, alors la première colonne de AB aussi.

c) Si la première ligne de A ne contient que des zéros, alors la première ligne de AB aussi.

d) Si les colonnes de B sont linéairement dépendantes, alors les colonnes de AB le sont aussi.

e) Si les colonnes de B sont linéairement indépendantes, alors les colonnes de AB le sont aussi.

6. Déterminer si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses et justifier votre réponse:

a) Si A est une matrice de taille $m\times n$ telle que $A\vec{x}=\vec{0}$ pour tout $\vec{x}\in\mathbb{R}^n$, alors $A=O$.

b) Si A, B et C sont des matrices telles que $AB=AC$, alors $B=C$.

c) Si A et B sont des matrices de taille $m\times n$ telles que $A\vec{x}=B\vec{x}$ pour tout $\vec{x}\in\mathbb{R}^n$, alors $A=B$.

d) Si A est une matrice inversible, alors $(A^2)^{-1}=(A^{-1})^2$.

e) Si E est une matrice élémentaire, alors E est une matrice inversible.

➥ **Tourner la page s. v. p.**

Série 5
Suite

A domicile

7. Soient

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & -3 & 1 \\ 0 & 5 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Calculer (lorsque c'est possible):

AB, BA, AC, CA, BC, CB, $C+C^T$, AA^T, A^TA, A^TA+C, A^2, C^2, C^3, $A(C+C^2)$, $(C+C^2)^2$.

8. Trouver deux matrices A et B de taille 2×2 telles que $AB = O$ et $BA \neq O$.

9. Soit A une matrice de taille $m \times n$. Montrer les affirmations suivantes:

a) Si I_k est la matrice identité de taille $k\times k$, alors $I_m A = A$ et $AI_n = A$.

b) Si B et C sont des matrices de taille $n\times p$, alors $A(B+C) = AB+AC$.

c) Si B et C sont des matrices de taille $k\times m$, alors $(B+C)A = BA+CA$.

d) Si B est une matrice de taille $n\times p$, alors $(AB)^T = B^TA^T$.

10. Déterminer si les matrices suivantes sont inversibles:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 5 & 2 & 7 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & -7 & 5 \end{bmatrix}.$$

Calculer leur inverse lorsque cela est possible.

11. Considérer les matrices suivantes:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & -7 & -1 \\ 8 & 1 & 5 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 8 & 1 & 5 \\ 2 & -7 & -1 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & -7 & -1 \\ 2 & -7 & 3 \end{bmatrix}$$

Trouver des matrices élémentaires E_1, E_2, E_3 et E_4 telles que

a) $E_1A = B$ **b)** $E_2B = A$ **c)** $E_3A = C$ **d)** $E_4C = A$

12. **a)** Déterminer la matrice échelonnée-réduite associée à la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

b) Utiliser la partie a) pour écrire A^{-1} comme produit de matrices élémentaires.

c) Utiliser la partie b) pour écrire A comme produit de matrices élémentaires.

13. **a)** Déterminer la matrice échelonnée-réduite R associée à la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 7 & 8 \\ 1 & 3 & 3 & 8 \\ -2 & -5 & 1 & -8 \end{bmatrix}$$

b) Utiliser la partie a) pour écrire la matrice A sous la forme

$$A = EFGHR, \qquad \text{où } E, F, G \text{ et } H \text{ sont des matrices élémentaires.}$$