

En classe

1. Déterminer lesquelles des applications suivantes sont linéaires:

a) $T : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ $x \longmapsto \cos(x)$	b) $T : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ $x \longmapsto 2x + 3$	c) $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ $(x, y) \longmapsto (x - 5y, 3x)$
--	---	--

2. Déterminer les matrices associées aux applications linéaires suivantes et calculer ensuite l'image d'un vecteur quelconque $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

- a)** rotation $\rho : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ d'angle π dans le sens positif,
b) symétrie $\sigma : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ par rapport à la droite $y = x$.

3. Si $S : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^n$ et $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ sont deux transformations, alors la *composition de S avec T*, notée $T \circ S$, est définie par

$$(T \circ S)(\vec{u}) = T(S(\vec{u})), \quad \text{pour tout } \vec{u} \in \mathbb{R}^p.$$

Montrer que si S et T sont des applications linéaires, alors $T \circ S$ est aussi une application linéaire.

4. Calculer la matrice associée à chacune des applications linéaires suivantes et déterminer si les applications linéaires sont injectives, surjectives ou bijectives:

- a)** $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ donnée par $T(x, y) = (2y, 3x)$
b) $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ donnée par $T(x, y) = (5x - y, 0)$
c) $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ donnée par $T(x, y, z) = (x + y, x - z)$
d) $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ donnée par $T(x, y) = (y, x, x - y)$
e) $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ donnée par $T(x, y) = (x - y, y - x, 2x - 2y)$
f) $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ donnée par $T(x, y, z) = (x + y + z, x - y - z)$

5. **a)** Calculer la matrice associée à l'application linéaire $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ donnée par

$$T(x, y, z, u) = (x + 3y + 5z + 7u, -x + 3y, x + 2y + 3z + 7u)$$

- b)** Déterminer si l'application linéaire T est injective, surjective ou bijective.

- c)** Déterminer ensuite tous les vecteurs $(x, y, z, u) \in \mathbb{R}^4$ tels que $T(x, y, z, u) = (0, 0, 0)$.

6. L'application linéaire $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ donnée par

$$T(x, y, z) = (x + 2y + 3z, 2x - 5y + 7z, 3x - y - 2z, y + 3z)$$

☐ est injective mais pas surjective

☐ est bijective

☐ est surjective mais pas injective

☐ n'est ni surjective ni injective

7. L'application linéaire $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ donnée par

$$T(x, y, z) = (x + 3y - 5z, 3x + 4y + 5z, 4x + 7y)$$

☐ est injective mais pas surjective

☐ est bijective

☐ est surjective mais pas injective

☐ n'est ni surjective ni injective

8. Déterminer si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses et justifier votre réponse:
- a) Si $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ est un ensemble linéairement indépendant de $\mathbb{R}^n$ et $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ est une application linéaire, alors $\{T(\vec{v}_1), T(\vec{v}_2)\}$ est un ensemble linéairement indépendant de $\mathbb{R}^m$.
 - b) Si $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ est un ensemble linéairement dépendant de $\mathbb{R}^n$ et $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ est une application linéaire, alors $\{T(\vec{v}_1), T(\vec{v}_2)\}$ est un ensemble linéairement dépendant de $\mathbb{R}^m$.
 - c) Soit $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ une application linéaire. Si les vecteurs $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k$ engendrent $\mathbb{R}^n$ et sont tels que $T(\vec{v}_j) = \vec{0}$ pour tout $j \in \{1, \dots, k\}$, alors $T(\vec{v}) = \vec{0}$ pour tout $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$.
 - d) Si $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ est telle que $T(\vec{0}) = \vec{0}$, alors T est une application linéaire.
 - e) Si $T(\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}) = \lambda T(\vec{u}) + \mu T(\vec{v})$ pour tout $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, alors $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ est une application linéaire.

A domicile

9. Déterminer lesquelles des applications suivantes sont linéaires:
- a) $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto \sin(x)$
 - b) $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$
 $x \mapsto (x, x^2)$
 - c) $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$
 $(x, y) \mapsto (x + y, 2x - 3y)$
 - d) $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$
 $(x, y, z) \mapsto (2x - z, x + y)$
 - e) $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$
 $(x, y, z, u) \mapsto (2x + u, y - z + 1)$
10. Déterminer les matrices associées aux applications linéaires suivantes et calculer ensuite l'image d'un vecteur quelconque $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:
- a) rotation $\rho : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ d'angle $\frac{\pi}{4}$ dans le sens positif,
 - b) symétrie $\sigma : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ par rapport à la droite $y = -x$.
11. Soient $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k$ des vecteurs linéairement indépendants de $\mathbb{R}^n$ et soit $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ une application linéaire. Montrer que si T est injective, alors $\{T(\vec{v}_1), \dots, T(\vec{v}_k)\}$ est un ensemble linéairement indépendant de $\mathbb{R}^m$.
12. a) Calculer la matrice associée à l'application linéaire $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ donnée par
 $T(x, y, z) = (2x - 2y + 4z, 5x - 4y + 7z, 3x - 2y + 3z, x - y + 2z)$
- b) Déterminer si l'application linéaire T est injective, surjective ou bijective.
- c) Déterminer ensuite tous les vecteurs (x, y, z) tels que $T(x, y, z) = (0, 0, 0, 0)$.
13. a) Calculer la matrice associée à l'application linéaire $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ donnée par
 $T(x, y, z) = (2x - 2y + 4z, 5x - 4y + 7z, 3x - 2y + 4z, x - y + 2z)$
- b) Déterminer si l'application linéaire T est injective, surjective ou bijective.
- c) Déterminer ensuite tous les vecteurs (x, y, z) tels que $T(x, y, z) = (0, 0, 0, 0)$.
14. Soit $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ une application linéaire.
Déterminer la condition nécessaire que doivent satisfaire m et n pour que
- a) T soit surjective,
 - b) T soit injective,
 - c) T soit bijective.
15. Soit $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ une application linéaire.
- a) Montrer que si T est surjective, alors T est aussi injective.
 - b) Montrer que si T est injective, alors T est aussi surjective.