Algèbre linéaire **Série 3**

CGC, EL, MX 26 septembre 2024

En classe

1. Ecrire le vecteur $\vec{u} = \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{bmatrix}$ comme combinaison linéaire des vecteurs $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ et $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$.

2. Déterminer si les vecteurs suivants engendrent $\mathbb{R}^3$:

a) $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ **b)** $\vec{w}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\vec{w}_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\vec{w}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

3. Déterminer si les vecteurs suivants sont linéairement indépendants:

a) $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\vec{v}_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ **b)** $\vec{w}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\vec{w}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\vec{w}_3 = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$

4. Considérer les vecteurs

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{v}_3 = \begin{bmatrix} h+6 \\ 8 \\ 25 \end{bmatrix}.$$

Le vecteur $\vec{v}_3$ peut s'écrire comme combinaison linéaire des vecteurs $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ lorsque

☐ $h = 3$ ☐ $h = 5$ ☐ $h = 6$ ☐ $h = 4$

5. Soient les vecteurs

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \vec{w} = \begin{bmatrix} 4 \\ b \\ 0 \end{bmatrix}$$

Pour quelle valeur du nombre réel b le vecteur $\vec{w}$ appartient-il à $\mathrm{Vect}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$?

☐ $b = -2$ ☐ $b = 1$ ☐ $b = 2$ ☐ $b = -5$

6. Les vecteurs

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ b \\ 0 \end{bmatrix}$$

sont linéairement dépendants si et seulement si

☐ $b = 1$ ☐ $b = 2$ ☐ $b = 3$ ☐ $b = 4$

7. Soit h un paramètre réel. Les vecteurs

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ h \\ 1 \end{bmatrix}$$

sont linéairement indépendants si et seulement si

☐ $h = \frac{1}{2}$ ☐ $h = 0$ ☐ $h \neq \frac{1}{2}$ ☐ $h \neq 0$

➥ **Tourner la page s. v. p.**

Série 3
Suite

---

8. Déterminer si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses et justifier votre réponse:

a) Si $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont trois vecteurs non nuls de $\mathbb{R}^2$, alors $\vec{w}$ est une combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

b) Si le vecteur $\vec{v}_4$ est une combinaison linéaire des vecteurs $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ et $\vec{v}_3$, alors le vecteur $\vec{v}_1$ est une combinaison linéaire des vecteurs $\vec{v}_2$, $\vec{v}_3$ et $\vec{v}_4$.

c) Si A est une matrice de taille 3×4, alors les colonnes de A engendrent $\mathbb{R}^3$.

d) Les vecteurs $\vec{u}-\vec{v}$, $\vec{u}-\vec{w}$ et $\vec{v}-\vec{w}$ sont linéairement dépendants pour tout choix de $\vec{u},\vec{v},\vec{w}\in\mathbb{R}^n$.

e) Un ensemble formé d'un seul vecteur est linéairement indépendant.

f) Une matrice de taille 6×4 doit posséder quatre pivots pour que ses colonnes soient linéairement indépendantes.

g) Soit A une matrice de taille $m\times n$. Si les n colonnes de A sont linéairement indépendantes, alors le système homogène $A\vec{x}=\vec{0}$ possède une infinité de solutions.

A domicile

9. Ecrire le vecteur $\vec{u}=\begin{bmatrix}3\\4\\2\end{bmatrix}$ comme combinaison linéaire des vecteurs $\vec{v}_1=\begin{bmatrix}1\\2\\4\end{bmatrix}$ et $\vec{v}_2=\begin{bmatrix}1\\3\\9\end{bmatrix}$.

10. **a)** Déterminer si les vecteurs

$$\vec{v}_1=\begin{bmatrix}1\\1\\3\end{bmatrix},\qquad \vec{v}_2=\begin{bmatrix}1\\2\\5\end{bmatrix},\qquad \vec{v}_3=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix},\qquad \vec{v}_4=\begin{bmatrix}1\\-1\\-1\end{bmatrix}$$

sont linéairement indépendants.

b) Déterminer si les vecteurs $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{v}_3$ et $\vec{v}_4$ engendrent $\mathbb{R}^3$.

11. **a)** Déterminer si les vecteurs

$$\vec{v}_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\\1\end{bmatrix},\qquad \vec{v}_2=\begin{bmatrix}1\\1\\0\\2\end{bmatrix},\qquad \vec{v}_3=\begin{bmatrix}0\\1\\1\\2\end{bmatrix},\qquad \vec{v}_4=\begin{bmatrix}0\\0\\1\\2\end{bmatrix}$$

sont linéairement indépendants.

b) Déterminer si les vecteurs $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{v}_3$ et $\vec{v}_4$ engendrent $\mathbb{R}^4$.

12. Déterminer les valeurs du paramètre $\lambda\in\mathbb{R}$ pour lesquelles les vecteurs

$$\begin{bmatrix}1\\0\\\lambda+1\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}\lambda\\1\\0\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}0\\1\\\lambda^2-1\end{bmatrix}$$

sont linéairement indépendants.

Réponses:

Voir site Moodle: `https://moodle.epfl.ch/course/view.php?id=14100`