

En classe

1. Echelonner et réduire les matrices suivantes:

a) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

b) $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & 5 \end{bmatrix}$

2. Déterminer toutes les valeurs possibles des nombres a , b , c , d et e pour lesquelles la matrice suivante est échelonnée-réduite:

$$\begin{bmatrix} 1 & a & b & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & c & 1 & d & 3 \\ 0 & e & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

3. Trouver la solution générale des systèmes d'équations linéaires suivants:

a) $\begin{cases} x - y + 3z = 0 \\ 2x + y + 3z = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x + 5y = 1 \\ 2x + 4y - 2z = 0 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x + 2y + 3z + 4u = 0 \\ 4x + 5y + 6z + 7u = 0 \\ 4x + 2y - 2u = 0 \\ x - 2y - 3z - 5u = 0 \end{cases}$

4. Déterminer les valeurs des nombres réels a et b pour que le système $\begin{cases} x + 2y = a \\ 4x + by = 12 \end{cases}$
- a) ne possède pas de solution,
b) possède une solution unique,
c) possède une infinité de solutions.

5. Déterminer les valeurs du nombre réel a pour lesquelles le système d'équations linéaires

$$\begin{cases} x + y + 2z = 2 \\ y + az = 2 \\ (a^2 - 4)z = a - 2 \end{cases}$$

possède des solutions. Déterminer ces solutions.

6. Soit R la forme échelonnée-réduite de la matrice

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & -4 & 8 \\ -1 & 2 & 1 & 8 \\ 2 & 2 & -5 & 5 \end{bmatrix}.$$

Alors, on a

☐ $r_{14} = 6$

☐ $r_{14} = 5$

☐ $r_{14} = 3$

☐ $r_{14} = 2$

7. Soit $h \in \mathbb{R}$. Le système d'équations linéaires

$$\begin{cases} x + 2y + z = -2 \\ -3x - 5y - z = h^3 - h \\ -2x - 4y - 2z = h^3 - 4h + 4 \end{cases}$$

possède une infinité de solutions si et seulement si

☐ $h \in \{-2, 1, 2\}$

☐ $h \in \{-1, 0, 1\}$

☐ $h \in \{-2, 0, 2\}$

☐ $h \in \{-1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\}$

8. Déterminer si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses et justifier votre réponse:
- a) Si la matrice échelonnée-réduite associée à la matrice augmentée d'un système d'équations linéaires possède une ligne formée de zéros, alors le système possède une infinité de solutions.
 - b) Si la matrice échelonnée-réduite associée à un système d'équations linéaires homogènes à m équations et n inconnues possède r pivots, alors le système a $n - r$ variables libres.
 - c) Si un système d'équations linéaires homogènes possède plus d'inconnues que d'équations, alors il a une infinité de solutions.

A domicile

9. Echelonner et réduire les matrices suivantes:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 3 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & -1 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 4 & -3 \\ 4 & -1 & 6 & -4 \\ -2 & 2 & -6 & 5 \end{bmatrix}.$$

10. Déterminer toutes les matrices échelonnées-réduites de taille 3×3 .

11. Trouver la solution générale du système d'équations linéaires suivant

$$\begin{cases} 3x_1 + 6x_2 + 9x_3 + 5x_4 + 25x_5 = 53 \\ 7x_1 + 14x_2 + 21x_3 + 9x_4 + 53x_5 = 105 \\ -4x_1 - 8x_2 - 12x_3 + 5x_4 - 10x_5 = 11 \end{cases}$$

12. Déterminer les valeurs des paramètres réels a , b et c pour lesquelles le système d'équations

$$\begin{cases} x - 2y + 3z + u = a \\ x + 3y - 2z + u = b \\ x - 7y + 8z + u = c \end{cases}$$

possède des solutions. Déterminer ces solutions.

13. Déterminer les valeurs des nombres réels a et b pour que le système associé à la matrice augmentée

$$\left[\begin{array}{ccc|c} a & 0 & b & 2 \\ a & a & 4 & 4 \\ 0 & a & 2 & b \end{array} \right]$$

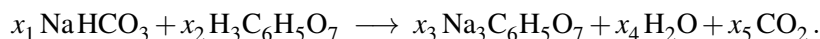
- a) ne possède pas de solution,
- b) possède une solution unique,
- c) possède une infinité de solutions.

14. Déterminer les valeurs du nombre réel a pour lesquelles le système d'équations linéaires

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = a \\ 2x + ay + 4z = -4 \\ -x + y + az = 2 \end{cases}$$

possède des solutions. Déterminer ces solutions.

15. Trouver les plus petits nombres entiers $x_1, x_2, \dots, x_5$ qui équilibrent la réaction chimique suivante:



Remarque: Cette réaction entre le bicarbonate de sodium et l'acide citrique décrit l'effervescence produite par une tablette d'Alka-Seltzer quand elle est dissoute dans l'eau.