

1. $A = PDP^T$ avec $P = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$ et $D = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

$$A = - \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

2. $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$

3. a) $Q(\vec{x}) = x_1^2 - 4x_1x_2 + x_2^2$

b) $\vec{u}_1 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}, \quad \vec{u}_2 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$

c) $Q(\vec{y}) = -y_1^2 + 3y_2^2$

Q est indéfinie

4. chaque solution de $A^T A \vec{x} = A^T \vec{b}$ est une solution de $A \vec{x} = \vec{b}$ au sens des moindres carrés

5. $P = \begin{bmatrix} 2/\sqrt{5} & 0 & 1/\sqrt{5} \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/\sqrt{5} & 0 & 2/\sqrt{5} \end{bmatrix}$

6. $\begin{bmatrix} -1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \end{bmatrix}$

7. a) V b) V c) F d) V e) F

8. $\text{proj}_W \vec{b} = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$

9. $\hat{x} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{5} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ (solution du système $R\vec{x} = Q^T \vec{b}$)

11. $A = PDP^T$ avec $P = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{6}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 \\ -\frac{\sqrt{6}}{6} & -\frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$ et $D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix}$

$$A = 6 \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} - 6 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$B = PDP^T \text{ avec } P = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 & \frac{\sqrt{6}}{3} \end{bmatrix} \text{ et } D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$B = 2 \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

12. Matrice A:

forme quadratique associée: $Q(\vec{x}) = 2x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 10x_2x_3$

axes principaux: $\vec{u}_1 = \left(-\frac{\sqrt{6}}{3}, -\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{6}\right)$, $\vec{u}_2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$, $\vec{u}_3 = \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

forme diagonale: $Q(\vec{y}) = 6y_2^2 - 6y_3^2$

Q ne peut pas être classifiée.

Matrice B:

forme quadratique associée: $Q(\vec{x}) = 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$

axes principaux: $\vec{w}_1 = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$, $\vec{w}_2 = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$, $\vec{w}_3 = \left(-\frac{\sqrt{6}}{6}, -\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{3}\right)$

forme diagonale: $Q(\vec{y}) = 2y_1^2 - y_2^2 - y_3^2$

Q est indéfinie