

En classe

1. Donner la dimension et trouver une base du complément orthogonal $W^\perp$ du sous-espace vectoriel

$$W = \text{Vect}\{(1, 0, 0, 1), (1, 0, 1, 0)\}.$$

2. Montrer que les vecteurs

$$\vec{v}_1 = (1, 1, 1), \quad \vec{v}_2 = (1, 0, -1) \quad \text{et} \quad \vec{v}_3 = (1, -2, 1)$$

forment une base orthogonale de $\mathbb{R}^3$.

Déterminer les coordonnées du vecteur $\vec{x} = (3, 1, 4)$ par rapport à cette base.

3. Montrer que les vecteurs

$$\vec{v}_1 = (1, 0, -1), \quad \vec{v}_2 = (1, -4, 1) \quad \text{et} \quad \vec{v}_3 = (4, 2, 4)$$

forment une base orthogonale de $\mathbb{R}^3$.

Déterminer les coordonnées du vecteur $\vec{x} = (6, 4, -2)$ par rapport à cette base.

4. Considérer les vecteurs

$$\vec{u} = (1, 2, 2) \quad \text{et} \quad \vec{v} = (-2, 3, 2)$$

a) Calculer $\vec{u} \cdot \vec{v}$, $\|\vec{u}\|$ et $\|\vec{v}\|$.

b) Calculer la distance entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

c) Calculer $\text{proj}_{\vec{v}} \vec{u}$ et $\text{proj}_{\vec{u}} \vec{v}$.

5. Soit $W = \text{Vect}\{(1, 2, 1), (-1, 1, -1)\}$. Calculer la projection orthogonale du vecteur $\vec{y} = (2, 1, 3)$ sur W et déterminer la distance entre $\vec{y}$ et W .

6. Soit A la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

et soit $W = \text{Nul}(A)$. Alors $W^\perp$ est formé des vecteurs $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ dont les composantes v_1, v_2, v_3 satisfont

$$\square \quad \begin{cases} v_1 - v_2 = 0 \\ v_2 + v_3 = 0 \end{cases}$$

$$\square \quad \begin{cases} v_1 + v_2 = 0 \\ v_2 - v_3 = 0 \end{cases}$$

$$\square \quad v_1 - v_2 + v_3 = 0$$

$$\square \quad -v_1 + v_2 + v_3 = 0$$

7. Soient $\vec{u} = (1, -2, 1)$ et $\vec{v} = (-3, 1, -1)$. Alors nous avons

$$\square \quad \text{proj}_{\vec{u}} \vec{v} = -\frac{6}{11} \vec{u}$$

$$\square \quad \text{proj}_{\vec{u}} \vec{v} = -\vec{u}$$

$$\square \quad \text{proj}_{\vec{v}} \vec{u} = -\frac{6}{11} \vec{u}$$

$$\square \quad \text{proj}_{\vec{v}} \vec{u} = -\vec{v}$$

8. Déterminer si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses et justifier votre réponse:
- a) Si deux vecteurs sont orthogonaux, alors ils sont linéairement indépendants.
 - b) Si deux vecteurs sont orthonormaux, alors ils sont linéairement indépendants.
 - c) Si $\vec{x}$ est orthogonal à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$, alors $\vec{x}$ est orthogonal à $\vec{u} - \vec{v}$.
 - d) Si W est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$, alors W et $W^\perp$ n'ont pas de vecteurs en commun.
 - e) Si W est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$, alors

$$\|\text{proj}_W \vec{v}\|^2 + \|\vec{v} - \text{proj}_W \vec{v}\|^2 = \|\vec{v}\|^2.$$

A domicile

9. Considérer les vecteurs

$$\vec{u} = (3, -4, -1) \quad \text{et} \quad \vec{v} = (-8, -7, 4)$$

Calculer $\vec{u} \cdot \vec{v}$, $\|\vec{u}\|^2$, $\|\vec{v}\|^2$, et $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2$. Vérifier la validité du théorème de Pythagore.

10. Trouver une base du complément orthogonal des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ suivants

a) $W_1 = \text{Vect}\{(1, 2, -1)\}$

b) $W_2 = \text{Vect}\{(1, 1, 1), (-1, 1, 3)\}$

11. Donner la dimension et trouver une base du complément orthogonal $W^\perp$ du sous-espace vectoriel

$$W = \text{Vect}\{(1, 1, 1, 0), (-1, 0, 1, 1), (0, 1, -1, 1)\}.$$

12. Montrer que les vecteurs

$$\vec{v}_1 = (4, -4, 0), \quad \vec{v}_2 = (2, 2, -1) \quad \text{et} \quad \vec{v}_3 = (1, 1, 4)$$

forment une base orthogonale de $\mathbb{R}^3$.

Déterminer les coordonnées du vecteur $\vec{x} = (3, -4, 7)$ par rapport à cette base.

13. Montrer que les vecteurs

$$\vec{v}_1 = (1, 1, 1, 1), \quad \vec{v}_2 = (1, -1, 1, -1), \quad \vec{v}_3 = (-1, 0, 1, 0) \quad \text{et} \quad \vec{v}_4 = (0, 1, 0, -1)$$

forment une base orthogonale de $\mathbb{R}^4$.

Déterminer les coordonnées du vecteur $\vec{x} = (1, 2, 3, 4)$ par rapport à cette base.

14. Soit $W = \text{Vect}\{(1, 1, 1, 1), (-1, -1, 1, 1), (-1, 1, -1, 1)\}$. Calculer la projection orthogonale du vecteur $\vec{y} = (2, 3, 5, 6)$ sur W et déterminer la distance entre $\vec{y}$ et W .

15. Soit $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ un vecteur non-nul donné.

- a) Montrer que l'application $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ définie par

$$T(\vec{v}) = \text{proj}_{\vec{x}} \vec{v}, \quad \text{pour tout } \vec{v} \in \mathbb{R}^n,$$

est une application linéaire.

- b) Déterminer la dimension et donner une base du noyau et de l'image de T .