Algèbre linéaire — Série 11

CGC, EL, MX — 28 novembre 2024

En classe

1. **a)** Déterminer les valeurs propres et les espaces propres de la matrice

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -5 & 5 \\ 15 & 18 & -15 \\ 15 & 15 & -12 \end{bmatrix}$$

b) Est-ce que cette matrice est diagonalisable? Justifier votre réponse.

2. **a)** Déterminer les valeurs propres et les espaces propres de la matrice

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

b) Est-ce que cette matrice est diagonalisable? Justifier votre réponse.

3. **a)** Déterminer les valeurs propres et les espaces propres de la matrice

$$C = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$$

b) Est-ce que cette matrice est diagonalisable? Justifier votre réponse.

4. Calculer A^5 où $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$.

Indication. Utiliser l'exercice 3 de la série 10.

5. Déterminer les valeurs propres et les espaces propres de l'application linéaire de l'exercice 14 de la série 9.

6. Soit

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Alors

- ☐ les valeurs propres de A sont 0, 2 et -2
- ☐ la seule valeur propre de A est 2
- ☐ les valeurs propres de A sont 1, -1, 2 et -2
- ☐ les valeurs propres de A sont 2 et -2

7. Soient A et B deux matrices de taille $n \times n$ telles que $A \neq B$. Si A et B sont diagonalisables, alors

- ☐ AB n'est jamais diagonalisable
- ☐ AB est toujours diagonalisable
- ☐ AB est diagonalisable si A et B ont les mêmes valeurs propres
- ☐ AB est diagonalisable si A et B ont les mêmes vecteurs propres

➥ **Tourner la page s. v. p.**

---

8. Soient A et B deux matrices diagonalisables de taille $n \times n$ telles que chaque espace propre de B est contenu dans un espace propre de A. Alors

- ☐ AB n'est jamais diagonalisable
- ☐ AB est toujours diagonalisable
- ☐ AB est diagonalisable si et seulement si A et B ont les mêmes valeurs propres
- ☐ AB est diagonalisable si et seulement si A et B ont les mêmes espaces propres

9. Soit A une matrice carrée de taille $n \times n$.

Déterminer si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses et justifier votre réponse:

a) Si A est inversible, alors A est diagonalisable.

b) Si A est diagonalisable, alors A est inversible.

c) Si $\operatorname{rang}(A) = 1$ et $\lambda = 0$ est une valeur propre de A de multiplicité (algébrique) $m_0 = n - 1$, alors A est diagonalisable.

A domicile

10. Est-ce que les matrices de l'exercice 11 de la série 10 sont diagonalisables? Justifier votre réponse.

11. **a)** Déterminer les valeurs propres et les espaces propres de la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -4 & 8 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -4 \end{bmatrix}$$

b) Est-ce que cette matrice est diagonalisable? Justifier votre réponse.

12. Déterminer si la matrice $B = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \in M_{2,2}(\mathbb{R})$ est diagonalisable.

13. Considérer la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1-b & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 1+b & 1+b & b \end{bmatrix}, \qquad \text{où } b \text{ est une constante réelle.}$$

a) Calculer les valeurs propres et les espaces propres de la matrice A.

b) Pour quelles valeurs de b la matrice A est-elle diagonalisable?

14. **a)** Calculer A^5 où $A = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}$. **b)** Calculer B^6 où $B = \begin{bmatrix} 2 & -8 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$.

15. Calculer C^4 où C est la matrice de l'exercice 11 de la série 10.

16. Déterminer les valeurs propres et les espaces propres de l'application linéaire de l'exercice 13 de la série 9.