

En classe

1. Considérer l'espace vectoriel $F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ de toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et V le sous-espace vectoriel de $F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ engendré par $f_1(x) = \sin(x)$ et $f_2(x) = \cos(x)$.

a) Montrer que $\mathcal{B} = \{f_1, f_2\}$ est une base de V .

b) Déterminer la matrice associée à l'application linéaire $T : V \longrightarrow V$ par rapport à la base $\mathcal{B}$.
 $f \longmapsto f'$

c) Déterminer la dimension et donner une base du noyau et de l'image de T .

2. Déterminer toutes les matrices de passage entre les bases suivantes de $\mathbb{R}^2$:

$$\mathcal{E} = \{(1, 0), (0, 1)\}, \quad \mathcal{B} = \{(-1, 8), (1, -7)\}, \quad \mathcal{C} = \{(1, 2), (1, 1)\}.$$

3. a) Déterminer les valeurs propres et les espaces propres de la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \in M_{2,2}(\mathbb{R}).$$

b) Déterminer la matrice de l'application linéaire associée à la matrice A :

$$T_A(x, y) = (-y, 2x + 3y)$$

par rapport à une base de $\mathbb{R}^2$ formée de deux vecteurs propres de A linéairement indépendants.

4. Soient $\mathcal{B} = \{(-7, 9), (7, 1)\}$ et $\mathcal{C} = \{(1, 3), (-3, 1)\}$ deux bases de $\mathbb{R}^2$. Alors la matrice de passage $P^{\mathcal{C}\mathcal{B}}$ de la base $\mathcal{B}$ vers la base $\mathcal{C}$ est égale à

$$\square \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \square \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \quad \square \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \quad \square \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

5. Les valeurs propres de la matrice

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -4 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

sont

$$\square \text{ 1 et 2}$$

$$\square \text{ 1 et 3}$$

$$\square \text{ 1, 2 et 3}$$

$$\square \text{ 1 et 4}$$

6. La dimension du sous-espace propre associé à la valeur propre $\lambda = 2$ de la matrice

$$C = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

est égale à

$$\square 0$$

$$\square 1$$

$$\square 2$$

$$\square 3$$

➡ Tourner la page s. v. p.

7. Soit A une matrice carrée de taille $n \times n$.

Déterminer si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses et justifier votre réponse:

- a) Si A est une matrice inversible qui admet $\lambda = 1$ comme valeur propre, alors A^{-1} admet aussi $\lambda = 1$ comme valeur propre.
- b) Si λ est une valeur propre de A , alors λ est une valeur propre de A^2 .
- c) Si $\vec{v} \neq \vec{0}$ est un vecteur propre de A , alors $\vec{v}$ est un vecteur propre de A^2 .
- d) Si λ est une valeur propre de A , alors λ^2 est une valeur propre de A^2 .
- e) Les matrices A et A^T possèdent les mêmes valeurs propres.
- f) Si $\lambda = 0$ est une valeur propre de A , alors $\text{rang } A < n$.
- g) Si A est inversible et λ est une valeur propre de A , alors $\frac{1}{\lambda}$ est une valeur propre de A^{-1} .

A domicile

8. Considérer l'espace vectoriel $F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ de toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et V le sous-espace vectoriel de $F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ engendré par $f_1(x) = e^x$ et $f_2(x) = xe^x$.

a) Montrer que $\mathcal{B} = \{f_1, f_2\}$ est une base de V .

b) Déterminer la matrice associée à l'application linéaire

$$\begin{aligned} T : V &\longrightarrow V \\ f &\longmapsto f'' - f' \end{aligned}$$

par rapport à la base $\mathcal{B}$.

c) Déterminer la dimension et donner une base du noyau et de l'image de T .

9. Déterminer toutes les matrices de passage entre les bases suivantes de $\mathbb{R}^3$:

$$\mathcal{E} = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\},$$

$$\mathcal{B} = \{(1, 0, 0), (0, 2, 1), (0, 1, 1)\},$$

$$\mathcal{C} = \{(1, 1, 1), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}.$$

10. a) Déterminer les valeurs propres et les espaces propres de la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 13 \end{bmatrix} \in M_{2,2}(\mathbb{R})$$

b) Déterminer la matrice de l'application linéaire associée à la matrice A :

$$T_A(x, y) = (2x + 4y, 3x + 13y)$$

par rapport à une base de $\mathbb{R}^2$ formée de deux vecteurs propres de A linéairement indépendants.

11. Déterminer les valeurs propres et les espaces propres des matrices

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \end{bmatrix}.$$