7.1. Diagonalisation des matrices symétriques.

Définition. Soit A une matrice. On dit que A est *symétrique* si

$$\boxed{A^T = A}$$

Remarque.

Il suit de la définition qu'une matrice symétrique est forcément carrée.

Exemples.

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \pi & e & \sqrt{2} \\ e & \pi & e \\ \sqrt{2} & e & \pi \end{bmatrix}$$

Considérons la matrice symétrique $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$.

Calculer les valeurs propres et les espaces propres associés.

Polynôme caractéristique:

$$p_c(\lambda) = \det(A - \lambda I) = (5-\lambda)^2 - 2^2 = (5-\lambda-2)(5-\lambda+2) = (3-\lambda)(7-\lambda)$$

Valeurs propres : $\lambda_1 = 7$, $\lambda_2 = 3$ (toutes les deux de multiplicité 1)

$\Rightarrow A$ est diagonalisable.

Espaces propres:

$\underline{\lambda_1=7}$: $A-7I=\begin{bmatrix}5-7 & 2\\ 2 & 5-7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2 & 2\\ 2 & -2\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & 0\end{bmatrix}$

système associé: $x-y=0 \iff x=y$

$E_7=\operatorname{Vect}\left\{\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\right\}$

$\underline{\lambda_2=3}$: $A-3I=\begin{bmatrix}5-3 & 2\\ 2 & 5-3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 2\\ 2 & 2\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}$

système associé: $x+y=0 \iff x=-y$

$E_3=\operatorname{Vect}\left\{\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}\right\}$

On constate que $\vec{v}_1=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ et $\vec{v}_2=\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}$ sont orthogonaux: $\vec{v}_1\cdot\vec{v}_2=0$

Par conséquent, $E_7^{\perp}=E_3$ et $E_3^{\perp}=E_7$

Théorème. Soit A une matrice symétrique de taille $n\times n$.

Si $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ sont deux vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes $\lambda_1\neq\lambda_2$, alors $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ sont orthogonaux $(\vec{u}_1\cdot\vec{u}_2=0)$.

Preuve. Par hypothèse: $A\vec{u}_1=\lambda_1\vec{u}_1$ et $A\vec{u}_2=\lambda_2\vec{u}_2$, avec $\lambda_1\neq\lambda_2$

On a $\lambda_1(\vec{u}_1\cdot\vec{u}_2)=(\lambda_1\vec{u}_1)\cdot\vec{u}_2=(A\vec{u}_1)\cdot\vec{u}_2=(A\vec{u}_1)^T\vec{u}_2$

$$=(\vec{u}_1^{\,T}A^T)\vec{u}_2=\vec{u}_1^{\,T}(A^T\vec{u}_2)=\vec{u}_1^{\,T}(A\vec{u}_2)$$

car A symétrique

$$=\vec{u}_1^{\,T}(\lambda_2\vec{u}_2)=\lambda_2(\vec{u}_1^{\,T}\vec{u}_2)$$

$$\lambda_1(\vec{u}_1\cdot\vec{u}_2)=\lambda_2(\vec{u}_1\cdot\vec{u}_2)$$

d'où $(\lambda_1-\lambda_2)(\vec{u}_1\cdot\vec{u}_2)=0$

Comme $\lambda_1\neq\lambda_2$, nous obtenons $\vec{u}_1\cdot\vec{u}_2=0$. ■

Rappel.

Une matrice A de taille $n \times n$ est diagonalisable s'il existe une matrice inversible P et une matrice diagonale D telles que

$$A = PDP^{-1}.$$

Les coefficients diagonaux de D sont les valeurs propres de A et les colonnes de P sont des vecteurs propres associés.

Nous avons vu que si A possède n valeurs propres distinctes, alors A est forcément diagonalisable, mais qu'elle peut être non diagonalisable si la multiplicité d'une valeur propre est plus grande que la dimension du sous-espace propre associé.

Rappel.

On dit qu'une matrice carrée U de taille $n \times n$ est orthogonale si U est inversible et $\boxed{U^{-1} = U^T}$

Remarque.

Comme par définition nous avons $U^T U = I_n$, les colonnes de U sont orthonormées et forment une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$.

De plus, comme $UU^T = I_n$, les colonnes de U^T (c-à-d. les lignes de U) sont aussi orthonormées et forment une autre base orthonormale de $\mathbb{R}^n$.

Considérons à nouveau l'exemple $A=\begin{bmatrix}5&2\\2&5\end{bmatrix}$. Nous avons :

$$A=\begin{bmatrix}1&-1\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}7&0\\0&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-1\\1&1\end{bmatrix}^{-1}$$

Comme les vecteurs propres $\vec{v}_1=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ et $\vec{v}_2=\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}$ sont orthogonaux, ils forment une base orthogonale de $\mathbb{R}^2$.

Par conséquent, les vecteurs $\vec{u}_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ et $\vec{u}_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}$ forment une base orthonormale de $\mathbb{R}^2$. Si on pose :

$$P=[\vec{u}_1\ \vec{u}_2]=\begin{bmatrix}1/\sqrt{2}&-1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}&1/\sqrt{2}\end{bmatrix} \quad \text{et} \quad D=\begin{bmatrix}7&0\\0&3\end{bmatrix}$$

nous avons $A=PDP^{-1}$. Or, comme les colonnes de P sont orthonormales, la matrice P est en fait orthogonale ($P^{-1}=P^T$), d'où $A=PDP^T$.

Définition. Soit A une matrice carrée de taille $n\times n$.

On dit que A est une matrice *diagonalisable orthogonalement* s'il existe une matrice orthogonale P et une matrice diagonale D telles que

$$\boxed{A=PDP^T}$$

Remarque.

Si A est diagonalisable orthogonalement, alors A est diagonalisable car $P^{-1}=P^T$.

Par contre, si A est diagonalisable, alors A *n'est pas* forcément diagonalisable orthogonalement.

Si A est diagonalisable orthogonalement, alors :

$$A = PDP^T \quad \text{où } P \text{ est orthogonale et } D \text{ est diagonale.}$$

d'où $A^T = (PDP^T)^T = (P^T)^T D^T P^T = PDP^T = A \Rightarrow A^T = A$

Par conséquent, A est symétrique.

Il est possible de montrer que la réciproque est aussi vraie :

Théorème. Soit A une matrice de taille $n \times n$. Nous avons l'équivalence.

$$A \text{ est diagonalisable orthogonalement} \Leftrightarrow A \text{ est symétrique.}$$

Conséquence.

Si A est symétrique, alors A est forcément diagonalisable.

Exemple.

Diagonaliser orthogonalement la matrice $A = \begin{bmatrix} 5 & -4 & -2 \\ -4 & 5 & -2 \\ -2 & -2 & 8 \end{bmatrix}$

Polynôme caractéristique :

$$P_C(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} 5-\lambda & -4 & -2 \\ -4 & 5-\lambda & -2 \\ -2 & -2 & 8-\lambda \end{bmatrix} \underset{L_1 \to L_1 - L_2}{=} \det \begin{bmatrix} 9-\lambda & -9+\lambda & 0 \\ -4 & 5-\lambda & -2 \\ -2 & -2 & 8-\lambda \end{bmatrix}$$

$$\underset{C_2 \to C_2 + C_1}{=} \det \begin{bmatrix} 9-\lambda & 0 & 0 \\ -4 & 1-\lambda & -2 \\ -2 & -4 & 8-\lambda \end{bmatrix} \underset{\text{dév.} L_1}{=} (9-\lambda) \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & -2 \\ -4 & 8-\lambda \end{bmatrix}$$

$$= (9-\lambda)\big((1-\lambda)(8-\lambda) - (-4)(-2)\big) = (9-\lambda)(\lambda^2 - 9\lambda + 8 - 8)$$

$$= (9-\lambda)(\lambda^2 - 9\lambda) = -\lambda(\lambda - 9)^2$$

Valeurs propres : $\lambda_1 = 0$ (multiplicité $m_0 = 1$)

$\lambda_1 = 9$ (multiplicité $m_9 = 2$)

Espaces propres :

$\lambda_1 = 0$:

$$A - 0I = \begin{bmatrix} 5 & -4 & -2 \\ -4 & 5 & -2 \\ -2 & -2 & 8 \end{bmatrix} \underset{\substack{L_1 \to L_1 + L_2 \\ L_3 \to \frac{1}{2} L_3}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -4 \\ -4 & 5 & -2 \\ -1 & -1 & 4 \end{bmatrix} \underset{\substack{L_2 \to L_2 + 4L_1 \\ L_3 \to L_3 + L_1}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 0 & 9 & -18 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\underset{L_2 \to \frac{1}{9} L_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \underset{L_1 \to L_1 - L_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

système associé : $\begin{cases} x \quad -2z = 0 \\ \quad y - 2z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 2z \\ y = 2z \end{cases}$

solution générale : $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, avec $t \in \mathbb{R}$

$E_0 = \text{Vect}\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ $(= \text{Nul}(A))$

Vérification : $\begin{bmatrix} 5 & -4 & -2 \\ -4 & 5 & -2 \\ -2 & -2 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10-8-2 \\ -8+10-2 \\ -4-4+8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\lambda_2 = 9$:

$$A - 9I = \begin{bmatrix} 5-9 & -4 & -2 \\ -4 & 5-9 & -2 \\ -2 & -2 & 8-9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -4 & -2 \\ -4 & -4 & -2 \\ -2 & -2 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

système associé : $2x + 2y + z = 0 \iff x = -y - \frac{1}{2} z$

solution générale : $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$, avec $s, t \in \mathbb{R}$

$E_9 = \text{Vect}\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$

Vérification : $\begin{bmatrix} 5 & -4 & -2 \\ -4 & 5 & -2 \\ -2 & -2 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5-4 \\ 4+5 \\ 2-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 \\ 9 \\ 0 \end{bmatrix} = 9 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 5 & -4 & -2 \\ -4 & 5 & -2 \\ -2 & -2 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5-4 \\ 4-4 \\ 2+16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 \\ 0 \\ 18 \end{bmatrix} = 9 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$

Les vecteurs $\vec{x}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ et $\vec{x}_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ ne sont pas orthogonaux : $\vec{x}_1 \cdot \vec{x}_2 = 1$.

On utilise le procédé de Gram-Schmidt pour trouver une base orthogonale de $E_9 = \mathrm{Vect}\{\vec{x}_1, \vec{x}_2\}$.

On pose $\vec{v}_1 = \vec{x}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ et $W_1 = \mathrm{Vect}\{\vec{v}_1\}$ $(= \mathrm{Vect}\{\vec{x}_1\})$

On calcule $\mathrm{proj}_{W_1} \vec{x}_2 = \dfrac{\vec{x}_2 \cdot \vec{v}_1}{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_1} \vec{v}_1 = \dfrac{1+0+0}{1+1+0} \vec{v}_1 = \dfrac{1}{2} \vec{v}_1$

et $\vec{x}_2 - \mathrm{proj}_{W_1} \vec{x}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/2 \\ -1/2 \\ 2 \end{bmatrix}$

On pose $\vec{v}_2 = 2(\vec{x}_2 - \mathrm{proj}_{W_1} \vec{x}_2) = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$ et $E_9 = \mathrm{Vect}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$

On vérifie : $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 1 - 1 + 0 = 0$

Conséquence : $\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix} \right\}$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}^3$

Comme $\left\| \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\| = \sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{9} = 3$

$\left\| \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{2}$

$\left\| \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix} \right\| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + 4^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

l'ensemble $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\} = \left\{ \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \frac{1}{3\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix} \right\}$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}^3$ et nous pouvons écrire $A = PDP^T$ où :

$$P = \begin{bmatrix} 2/3 & -1/\sqrt{2} & -1/3\sqrt{2} \\ 2/3 & 1/\sqrt{2} & -1/3\sqrt{2} \\ 1/3 & 0 & 4/3\sqrt{2} \end{bmatrix} = \frac{1}{3\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 2\sqrt{2} & -3 & -1 \\ 2\sqrt{2} & 3 & -1 \\ \sqrt{2} & 0 & 4 \end{bmatrix} \text{ et } D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

Rappel. Règle « ligne-colonne » du produit matriciel:

Nous avons vu que si A est une matrice de taille $m\times n$ et B est une matrice de taille $n\times p$, alors $C=AB$ est une matrice de taille $m\times p$ telle que

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\ldots+a_{in}b_{nj}$$

(produit scalaire de la i-ème ligne de A et la j-ème colonne de B)

Règle « colonne-ligne » du produit matriciel:

Nous avons :

$$AB=\begin{bmatrix}\text{colonne}_1(A) & \text{colonne}_2(A) & \cdots & \text{colonne}_n(A)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\text{ligne}_1(B)\\ \text{ligne}_2(B)\\ \vdots\\ \text{ligne}_n(B)\end{bmatrix}$$

$$=\text{colonne}_1(A)\,\text{ligne}_1(B)+\ldots+\text{colonne}_n(A)\,\text{ligne}_n(B)$$

En effet, l'élément ij du produit $\text{colonne}_k(A)\,\text{ligne}_k(B)$ est $a_{ik}b_{kj}$ et l'élément ij de la matrice AB est donc

$$a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\ldots+a_{in}b_{nj}$$

comme avant.

Théorème spectral

Soit A une matrice symétrique de taille $n \times n$. Alors :

- A possède n valeurs propres réelles (pas forcément distinctes), en tenant compte de leur multiplicité.
- La dimension de chaque espace propre est égale à la multiplicité de la valeur propre associée en tant que racine de P_c.
- Les espaces propres sont orthogonaux deux à deux
- A peut être diagonalisée orthogonalement : $A = PDP^T$ où P est orthogonale et D est diagonale.

L'ensemble des valeurs propres de A est appelé le spectre de A.

Décomposition spectrale.

Soit A une matrice symétrique de taille $n \times n$.

Si A est diagonalisée orthogonalement à l'aide de la matrice orthogonale $P = [\vec{u}_1\ \vec{u}_2 \cdots \vec{u}_n]$ et la matrice diagonale $D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}$, alors nous avons :

$$A = PDP^T = [\vec{u}_1 \cdots \vec{u}_n] \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{u}_1^{\,T} \\ \vdots \\ \vec{u}_n^{\,T} \end{bmatrix} = [\lambda_1 \vec{u}_1 \cdots \lambda \vec{u}_n] \begin{bmatrix} \vec{u}_1^{\,T} \\ \vdots \\ \vec{u}_n^{\,T} \end{bmatrix}$$

La règle « colonne-ligne » du produit matriciel nous donne :

$$A = \lambda_1 (\vec{u}_1 \vec{u}_1^{\,T}) + \lambda_2 (\vec{u}_2 \vec{u}_2^{\,T}) + \ldots + \lambda_n (\vec{u}_n \vec{u}_n^{\,T})$$

Définition. Soit A une matrice symétrique de taille $n \times n$.
On appelle **décomposition spectrale de A** l'écriture

$$\boxed{A = \lambda_1 (\vec{u}_1 \vec{u}_1^T) + \lambda_2 (\vec{u}_2 \vec{u}_2^T) + \ldots + \lambda_n (\vec{u}_n \vec{u}_n^T)}$$

où $\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n\}$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$ formée de vecteurs propres de A et $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sont les valeurs propres associées.

Remarque.

Nous avons vu que $\vec{u}_j \vec{u}_j^T$ est la matrice canoniquement associée à la projection orthogonale sur le sous-espace $\text{Vect}\{\vec{u}_j\} \subset \mathbb{R}^n$. Comme $\dim(\text{Vect}\{\vec{u}_j\}) = 1$, $\text{rang}(\vec{u}_j \vec{u}_j^T) = 1$ et A s'écrit comme la somme de matrices de rang 1.

Exemples.

1. Donner une décomposition spectrale de $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$

   Nous avons trouvé que $A = PDP^T$ où

$$P = [\vec{u}_1 \ \vec{u}_2] = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

   Par conséquent,

$$\begin{aligned} A &= 7\, \vec{u}_1 \vec{u}_1^T + 3\, \vec{u}_2 \vec{u}_2^T \\ &= 7 \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{A = 7 \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{bmatrix}}$$

2. Donner une décomposition spectrale de $A=\begin{bmatrix} 5 & -4 & -2 \\ -4 & 5 & -2 \\ -2 & -2 & 8 \end{bmatrix}$

Nous avons trouvé que $A = PDP^T$

$$P=[\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3] = \begin{bmatrix} 2/3 & -1/\sqrt{2} & -1/3\sqrt{2} \\ 2/3 & 1/\sqrt{2} & -1/3\sqrt{2} \\ 1/3 & 0 & 4/3\sqrt{2} \end{bmatrix} \text{ et } D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

Par conséquent,

$$A = 0\,\vec{u}_1\vec{u}_1^{\,T} + 9\,\vec{u}_2\vec{u}_2^{\,T} + 9\,\vec{u}_3\vec{u}_3^{\,T}$$

$$= 9\begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix} + 9\begin{bmatrix} -1/3\sqrt{2} \\ -1/3\sqrt{2} \\ 4/3\sqrt{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1/3\sqrt{2} & -1/3\sqrt{2} & 4/3\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \boxed{A = 9\begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 & 0 \\ -1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + 9\begin{bmatrix} 1/18 & 1/18 & -2/9 \\ 1/18 & 1/18 & -2/9 \\ -2/9 & -2/9 & 8/9 \end{bmatrix}}$$

7.2. Formes quadratiques.

Considérons une matrice symétrique $A=\begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix}$ de taille 2x2 et un vecteur $\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$.

Comme $A\vec{x} = \begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax_1 + bx_2 \\ bx_1 + dx_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ nous avons

$$\begin{aligned} \vec{x}^{\,T}A\vec{x} &= [x_1 \;\; x_2]\begin{bmatrix} ax_1 + bx_2 \\ bx_1 + dx_2 \end{bmatrix} \\ &= x_1(ax_1 + bx_2) + x_2(bx_1 + dx_2) \\ &= ax_1^2 + 2bx_1x_2 + dx_2^2 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Définition.

Soit A une matrice symétrique de taille $n \times n$.

On dit que la fonction $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est une forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$ si $\boxed{Q(\vec{x}) = \vec{x}^T A \vec{x}}$ pour tout $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$

Exemples.

1. Si $A = I_n$, alors la forme quadratique associée est
$$Q(\vec{x}) = \vec{x}^T I_n \vec{x} = \vec{x}^T \vec{x} = \|\vec{x}\|^2$$
2. Si $A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix}$, alors la forme quadratique associée est
$$Q(\vec{x}) = \vec{x}^T A \vec{x} = a x_1^2 + 2b x_1 x_2 + d x_2^2$$

Remarques.

- Si $Q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est une forme quadratique
$$Q(\vec{x}) = a x_1^2 + b x_1 x_2 + d x_2^2$$
alors la matrice symétrique associée est
$$A = \begin{bmatrix} a & b/2 \\ b/2 & d \end{bmatrix}$$
- Si $Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ est une forme quadratique
$$Q(\vec{x}) = a x_1^2 + b x_1 x_2 + c x_1 x_3 + d x_2^2 + e x_2 x_3 + f x_3^2$$
alors la matrice symétrique associée est
$$A = \begin{bmatrix} a & b/2 & c/2 \\ b/2 & d & e/2 \\ c/2 & e/2 & f \end{bmatrix}$$

Changement de variables.

Si $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, alors un changement de variables est une équation de la forme

$$\vec{x} = P\vec{y} \iff \vec{y} = P^{-1}\vec{x}$$

où P est une matrice inversible et $\vec{y} \in \mathbb{R}^n$ est la nouvelle variable.

Nous avons vu que toute matrice symétrique A de taille $n \times n$ peut être diagonalisée orthogonalement :

$$A = PDP^T$$

où $P = [\vec{u}_1 \cdots \vec{u}_n]$ est une matrice orthogonale $(P^{-1} = P^T)$ et D est une matrice diagonale.

L'ensemble $\mathcal{B} = \{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n\}$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$.

Soit $\vec{y} \in \mathbb{R}^n$ tel que $\vec{x} = P\vec{y}$. On a

$$\begin{aligned} \vec{x} &= [\vec{u}_1 \cdots \vec{u}_n]\vec{y} \\ &= y_1\vec{u}_1 + \cdots + y_n\vec{u}_n \end{aligned}$$

d'où $\boxed{\vec{y} = [\vec{x}]_{\mathcal{B}}}$ (vecteur de coordonnées de $\vec{x}$ dans la base $\mathcal{B}$)

Considérons maintenant la forme quadratique associée à A :

$$\vec{Q}(\vec{x}) = \vec{x}^T A \vec{x}$$

Si $\vec{x} = P\vec{y}$, alors nous avons

$$\vec{x}^T A \vec{x} = (P\vec{y})^T A (P\vec{y}) = \vec{y}^T (P^T A P)\vec{y}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{x}^T A \vec{x} = \vec{y}^T D \vec{y}} \qquad (\text{car } A = PDP^T \Longleftrightarrow P^T A P = D)$$

Conséquence.

La forme quadratique $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ exprimée dans la variable $\vec{y}$ s'écrit

$$\vec{y}^T D \vec{y} = [y_1 \cdots y_n] \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

$$= \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \ldots + \lambda_n y_n^2$$

(il n'y a pas de termes mixtes)

Définition.

On dit que la forme quadratique $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est sous **forme diagonale** si $Q(\vec{y}) = \vec{y}^T D \vec{y}$ pour tout $\vec{y} \in \mathbb{R}^n$

Exemple.

Nous avons vu que $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ s'écrit $A = PDP^T$ où

$$P = [\vec{u}_1 \ \vec{u}_2] = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Par conséquent, la forme quadratique

$$Q(\vec{x}) = 5x_1^2 + 4x_1x_2 + 5x_2^2$$

écrite sous forme diagonale est :

$$Q(\vec{y}) = 7y_1^2 + 3y_2^2$$

Théorème des axes principaux.

Soit A une matrice symétrique de taille $n \times n$.
Il existe une matrice orthogonale P telle que le changement de variables $\vec{x} = P\vec{y}$ met la forme quadratique $Q(\vec{x}) = \vec{x}^T A \vec{x}$ sous forme diagonale $Q(\vec{y}) = \vec{y}^T D \vec{y}$.
Les colonnes de P sont appelées les axes principaux de Q.

Preuve.

Comme par hypothèse A est symétrique, A peut être diagonalisée orthogonalement : $A = PDP^T$, où P est orthogonale et D est diagonale. ■

Exemples.

1. Comme $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} = PDP^T$ où

$$P = [\vec{u}_1 \ \vec{u}_2] = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Les axes principaux de

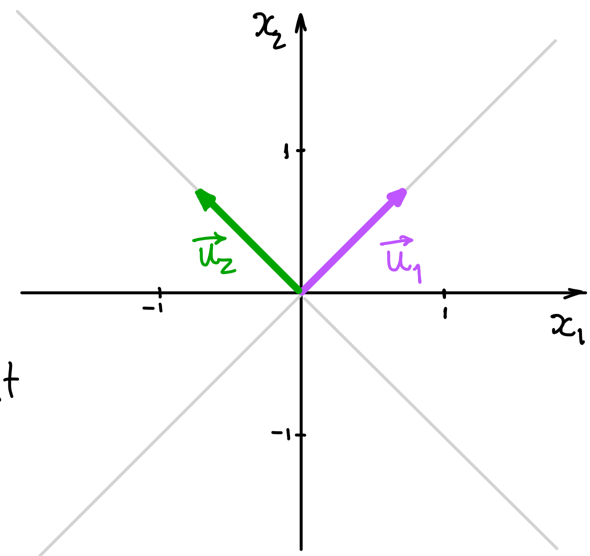
$$Q(\vec{x}) = 5x_1^2 + 4x_1x_2 + 5x_2^2$$

sont donc

$$\vec{u}_1 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{u}_2 = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

et la forme diagonale de Q est

$$Q(\vec{y}) = 7y_1^2 + 3y_2^2$$



2. Nous avons vu que $A=\begin{bmatrix}5 & -4 & -2\\ -4 & 5 & -2\\ -2 & -2 & 8\end{bmatrix}$ s'écrit $A=PDP^T$ où

$$P=[\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3]=\begin{bmatrix}2/3 & -1/\sqrt{2} & -1/3\sqrt{2}\\ 2/3 & 1/\sqrt{2} & -1/3\sqrt{2}\\ 1/3 & 0 & 4/3\sqrt{2}\end{bmatrix} \text{ et } D=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 9 & 0\\ 0 & 0 & 9\end{bmatrix}$$

Par conséquent, les axes principaux de la forme quadratique

$$Q(\vec{x})=5x_1^2-8x_1x_2-4x_1x_3+5x_2^2-4x_2x_3+8x_3^2$$

sont

$$\vec{u}_1=\begin{bmatrix}2/3\\ 2/3\\ 1/3\end{bmatrix},\quad \vec{u}_2=\begin{bmatrix}-1/\sqrt{2}\\ 1/\sqrt{2}\\ 0\end{bmatrix},\quad \vec{u}_3=\begin{bmatrix}-1/3\sqrt{2}\\ -1/3\sqrt{2}\\ 4/3\sqrt{2}\end{bmatrix}$$

et la forme diagonale de Q,

$$Q(\vec{y})=9y_2^2+9y_3^2$$

Définition.

Soit $Q:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ une forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$.

- on dit que Q est définie positive si $Q(\vec{x})>0$ pour tout $\vec{x}\neq\vec{0}$
- on dit que Q est définie négative si $Q(\vec{x})<0$ pour tout $\vec{x}\neq\vec{0}$
- on dit que Q est indéfinie si $Q(\vec{x})$ prend des valeurs positives et négatives pour tout $\vec{x}\neq\vec{0}$.

Théorème. Soit A une matrice symétrique de taille $n\times n$ et soit $Q(\vec{x})=\vec{x}^TA\vec{x}$ sa forme quadratique associée. Alors

- Q est définie positive $\Leftrightarrow$ toutes les valeurs propres de A sont positives
- Q est définie négative $\Leftrightarrow$ toutes les valeurs propres de A sont négatives
- Q est indéfinie $\Leftrightarrow$ A a des valeurs propres positives et négatives.

Preuve. Le théorème des axes principaux nous permet d'écrire
$$Q(\vec{y})=\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\dots+\lambda_ny_n^2$$
d'où le résultat. $\blacksquare$

Exemples.

1. La forme quadratique $Q(\vec{x})=\vec{x}^T\vec{x}=\|\vec{x}\|^2$ est définie positive car $Q(\vec{x})=\|\vec{x}\|^2>0$ pour tout $\vec{x}\neq\vec{0}$.
2. La forme quadratique $Q(\vec{x})=5x_1^2+4x_1x_2+5x_2^2$ est définie positive car les valeurs propres de $A=\begin{bmatrix}5&2\\2&5\end{bmatrix}$ sont $\lambda_1=7$ et $\lambda_2=3$.
3. La forme quadratique $Q(\vec{x})=2x_1^2+10x_1x_2+2x_2^2$ est indéfinie car les valeurs propres de $A=\begin{bmatrix}2&5\\5&2\end{bmatrix}$ sont $\lambda_1=7$ et $\lambda_2=-3$.
   $\left[\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix}2-\lambda&5\\5&2-\lambda\end{vmatrix}=(2-\lambda)^2-5^2=(-3-\lambda)(7-\lambda)\right]$