

Rappel. Règle « ligne-colonne » du produit matriciel:

Nous avons vu que si A est une matrice de taille $m \times n$ et B est une matrice de taille $n \times p$, alors $C = AB$ est une matrice de taille $m \times p$ telle que

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj}$$

(produit scalaire de la i -ème ligne de A et la j -ème colonne de B)

Règle « colonne-ligne » du produit matriciel:

Nous avons :

$$AB = \begin{bmatrix} \text{colonne}_1(A) & \text{colonne}_2(A) & \dots & \text{colonne}_n(A) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{ligne}_1(B) \\ \text{ligne}_2(B) \\ \vdots \\ \text{ligne}_n(B) \end{bmatrix}$$

$$= \text{colonne}_1(A) \text{ligne}_1(B) + \dots + \text{colonne}_n(A) \text{ligne}_n(B)$$

En effet, l'élément ij du produit $\text{colonne}_k(A) \text{ligne}_k(B)$

est $a_{ik} b_{kj}$ et l'élément ij de la matrice AB est donc

$$a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \dots + a_{in} b_{nj}$$

comme avant.

Théorème spectral

Soit A une matrice symétrique de taille $n \times n$. Alors:

- A possède n valeurs propres réelles (pas forcément distinctes), en tenant compte de leur multiplicité.
- La dimension de chaque espace propre est égale à la multiplicité de la valeur propre associée en tant que racine de P_A .
- Les espaces propres sont orthogonaux deux à deux
- A peut être diagonalisée orthogonalement : $A = PDP^T$
où P est orthogonale et D est diagonale.

L'ensemble des valeurs propres de A est appelé le spectre de A .

Décomposition spectrale.

Soit A une matrice symétrique de taille $n \times n$.

Si A est diagonalisée orthogonalement à l'aide de la matrice orthogonale $P = [\vec{u}_1 \ \vec{u}_2 \ \dots \ \vec{u}_n]$ et la matrice diagonale

$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \ddots \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}$, alors nous avons :

$$A = P D P^T = [\vec{u}_1 \ \dots \ \vec{u}_n] \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{u}_1^T \\ \vdots \\ \vec{u}_n^T \end{bmatrix} = [\lambda_1 \vec{u}_1 \ \dots \ \lambda_n \vec{u}_n] \begin{bmatrix} \vec{u}_1^T \\ \vdots \\ \vec{u}_n^T \end{bmatrix}$$

La règle « colonne-ligne » du produit matriciel nous donne :

$$A = \lambda_1 (\vec{u}_1 \vec{u}_1^T) + \lambda_2 (\vec{u}_2 \vec{u}_2^T) + \dots + \lambda_n (\vec{u}_n \vec{u}_n^T)$$

Définition. Soit A une matrice symétrique de taille $n \times n$.

On appelle décomposition spectrale de A l'écriture

$$A = \lambda_1 (\vec{u}_1 \vec{u}_1^T) + \lambda_2 (\vec{u}_2 \vec{u}_2^T) + \dots + \lambda_n (\vec{u}_n \vec{u}_n^T)$$

où $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n\}$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$ formée de vecteurs propres de A et $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont les valeurs propres associées.

Remarque.

Nous avons vu que $\vec{u}_j \vec{u}_j^T$ est la matrice canoniquement associée à la projection orthogonale sur le sous-espace $\text{Vect}\{\vec{u}_j\} \subset \mathbb{R}^n$. Comme $\dim(\text{Vect}\{\vec{u}_j\}) = 1$, $\text{rang}(\vec{u}_j \vec{u}_j^T) = 1$ et A s'écrit comme la somme de matrices de rang 1.

Exemples.

1. Donner une décomposition spectrale de $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$

Nous avons trouvé que $A = P D P^T$ où

$$P = [\vec{u}_1 \quad \vec{u}_2] = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} A &= 7 \vec{u}_1 \vec{u}_1^T + 3 \vec{u}_2 \vec{u}_2^T \\ &= 7 \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{A = 7 \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{bmatrix}}$$

2. Donner une décomposition spectrale de $A = \begin{bmatrix} 5 & -4 & -2 \\ -4 & 5 & -2 \\ -2 & -2 & 8 \end{bmatrix}$

Nous avons trouvé que $A = PDP^T$

$$P = [\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3] = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{3}\sqrt{2} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{3}\sqrt{2} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{4}{3}\sqrt{2} \end{bmatrix} \text{ et } D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

Par conséquent,

$$A = 0 \vec{u}_1 \vec{u}_1^T + 9 \vec{u}_2 \vec{u}_2^T + 9 \vec{u}_3 \vec{u}_3^T$$

$$= 9 \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix} + 9 \begin{bmatrix} -\frac{1}{3}\sqrt{2} \\ -\frac{1}{3}\sqrt{2} \\ \frac{4}{3}\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{3}\sqrt{2} & -\frac{1}{3}\sqrt{2} & \frac{4}{3}\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A = 9 \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + 9 \begin{bmatrix} \frac{1}{18} & \frac{1}{18} & -\frac{2}{9} \\ \frac{1}{18} & \frac{1}{18} & -\frac{2}{9} \\ -\frac{2}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{8}{9} \end{bmatrix}$$

7.2. Formes quadratiques.

Considérons une matrice symétrique $A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix}$ de taille 2×2 et un vecteur $\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$.

Comme $A\vec{x} = \begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax_1 + bx_2 \\ bx_1 + dx_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ nous avons

$$\begin{aligned} \vec{x}^T A \vec{x} &= [x_1 \ x_2] \begin{bmatrix} ax_1 + bx_2 \\ bx_1 + dx_2 \end{bmatrix} \\ &= x_1(ax_1 + bx_2) + x_2(bx_1 + dx_2) \\ &= ax_1^2 + 2bx_1x_2 + dx_2^2 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Définition.

Soit A une matrice symétrique de taille $n \times n$.

On dit que la fonction $Q: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est une **forme quadratique**

sur $\mathbb{R}^n$ si $Q(\vec{x}) = \vec{x}^T A \vec{x}$ pour tout $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$

Exemples.

1. Si $A = I_n$, alors la forme quadratique associée est

$$Q(\vec{x}) = \vec{x}^T I_n \vec{x} = \vec{x}^T \vec{x} = \|\vec{x}\|^2$$

2. Si $A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix}$, alors la forme quadratique associée est

$$Q(\vec{x}) = \vec{x}^T A \vec{x} = ax_1^2 + 2bx_1x_2 + dx_2^2$$

Remarques.

- Si $Q: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ est une forme quadratique

$$Q(\vec{x}) = ax_1^2 + bx_1x_2 + dx_2^2$$

alors la matrice symétrique associée est

$$A = \begin{bmatrix} a & b/2 \\ b/2 & d \end{bmatrix}$$

- Si $Q: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ est une forme quadratique

$$Q(\vec{x}) = ax_1^2 + bx_1x_2 + cx_1x_3 + dx_2^2 + ex_2x_3 + fx_3^2$$

alors la matrice symétrique associée est

$$A = \begin{bmatrix} a & b/2 & c/2 \\ b/2 & d & e/2 \\ c/2 & e/2 & f \end{bmatrix}$$

Changement de variables.

Si $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, alors un changement de variables est une équation de la forme

$$\vec{x} = P\vec{y} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{y} = P^{-1}\vec{x}$$

où P est une matrice inversible et $\vec{y} \in \mathbb{R}^n$ est la nouvelle variable.

Nous avons vu que toute matrice symétrique A de taille $n \times n$ peut être diagonalisée orthogonalement :

$$A = P D P^T$$

où $P = [\vec{u}_1 \dots \vec{u}_n]$ est une matrice orthogonale ($P^{-1} = P^T$) et D est une matrice diagonale.

L'ensemble $\mathcal{B} = \{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n\}$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$.

Soit $\vec{y} \in \mathbb{R}^n$ tel que $\vec{x} = P \vec{y}$. On a

$$\begin{aligned} \vec{x} &= [\vec{u}_1 \dots \vec{u}_n] \vec{y} \\ &= y_1 \vec{u}_1 + \dots + y_n \vec{u}_n \end{aligned}$$

d'où $\boxed{\vec{y} = [\vec{x}]_{\mathcal{B}}}$ (vecteur de coordonnées de $\vec{x}$ dans la base $\mathcal{B}$)

Considérons maintenant la forme quadratique associée à A :

$$Q(\vec{x}) = \vec{x}^T A \vec{x}$$

Si $\vec{x} = P\vec{y}$, alors nous avons

$$\vec{x}^T A \vec{x} = (P\vec{y})^T A (P\vec{y}) = \vec{y}^T (P^T A P) \vec{y}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{x}^T A \vec{x} = \vec{y}^T D \vec{y}} \quad (\text{car } A = P D P^T \Leftrightarrow P^T A P = D)$$

Conséquence.

La forme quadratique $Q: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ exprimée dans la variable $\vec{y}$ s'écrit

$$\begin{aligned} \vec{y}^T D \vec{y} &= [y_1 \dots y_n] \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \\ &= \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \dots + \lambda_n y_n^2 \end{aligned}$$

(il n'y a pas de termes mixtes)

Définition.

On dit que la forme quadratique $Q: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est sous forme diagonale si $Q(\vec{y}) = \vec{y}^T D \vec{y}$ pour tout $\vec{y} \in \mathbb{R}^n$

Exemple.

Nous avons vu que $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ s'écrit $A = P D P^T$ où

$$P = [\vec{u}_1 \ \vec{u}_2] = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Par conséquent, la forme quadratique

$$Q(\vec{x}) = 5x_1^2 + 4x_1x_2 + 5x_2^2$$

écrite sous forme diagonale est:

$$Q(\vec{y}) = 7y_1^2 + 3y_2^2$$

Théorème des axes principaux.

Soit A une matrice symétrique de taille $n \times n$.

Il existe une matrice orthogonale P telle que le changement de variables $\vec{x} = P\vec{y}$ met la forme quadratique $Q(\vec{x}) = \vec{x}^T A \vec{x}$ sous forme diagonale $Q(\vec{y}) = \vec{y}^T D \vec{y}$

Les colonnes de P sont appelées les **axes principaux** de Q .

Preuve.

Comme par hypothèse A est symétrique, A peut être diagonalisée orthogonalement : $A = P D P^T$, où P est orthogonale et D est diagonale. ■

Exemples.

1. Comme $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} = P D P^T$ où

$$P = [\vec{u}_1 \ \vec{u}_2] = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Les axes principaux de

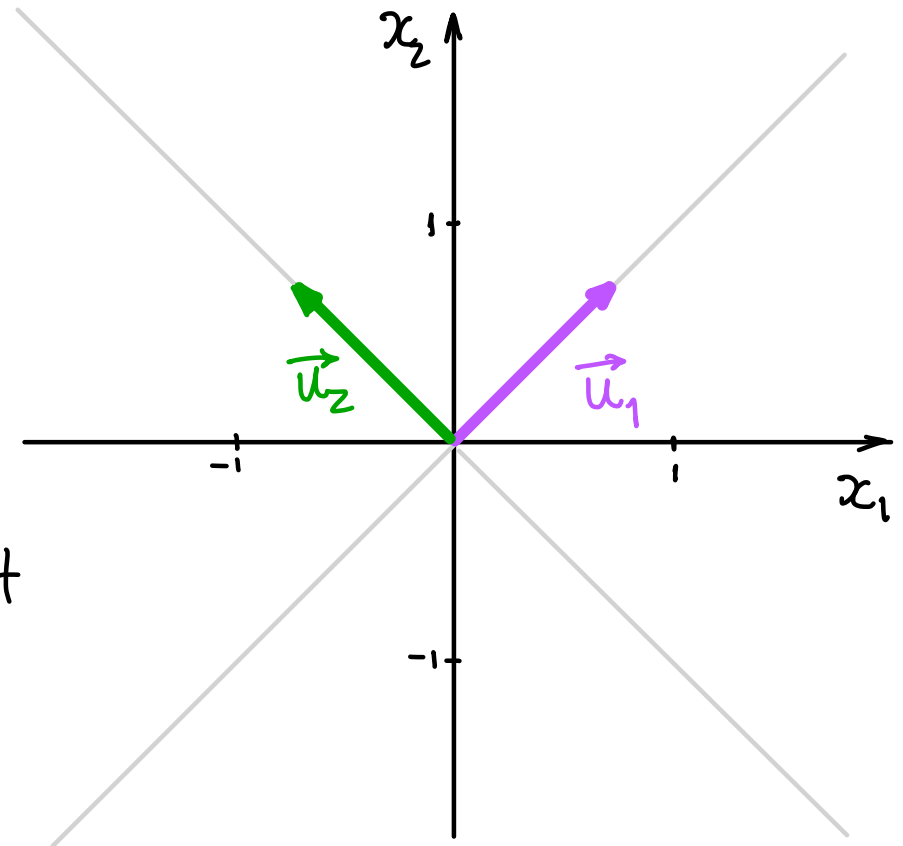
$$Q(\vec{x}) = 5x_1^2 + 4x_1x_2 + 5x_2^2$$

sont donc

$$\vec{u}_1 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{u}_2 = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

et la forme diagonale de Q est

$$Q(\vec{y}) = 7y_1^2 + 3y_2^2$$



2. Nous avons vu que $A = \begin{bmatrix} 5 & -4 & -2 \\ -4 & 5 & -2 \\ -2 & -2 & 8 \end{bmatrix}$ s'écrit $A = PDP^T$ où

$$P = [\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3] = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{3}\sqrt{2} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{3}\sqrt{2} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{4}{3}\sqrt{2} \end{bmatrix} \text{ et } D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

Par conséquent, les axes principaux de la forme quadratique

$$Q(\vec{x}) = 5x_1^2 - 8x_1x_2 - 4x_1x_3 + 5x_2^2 - 4x_2x_3 + 8x_3^2$$

sont

$$\vec{u}_1 = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}, \quad \vec{u}_2 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{u}_3 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3}\sqrt{2} \\ -\frac{1}{3}\sqrt{2} \\ \frac{4}{3}\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

et la forme diagonale de Q ,

$$Q(\vec{y}) = 9y_2^2 + 9y_3^2$$

Définition.

Soit $Q: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une forme quadratique sur $\mathbb{R}^n$.

- on dit que Q est **définie positive** si $Q(\vec{x}) > 0$ pour tout $\vec{x} \neq \vec{0}$
- on dit que Q est **définie négative** si $Q(\vec{x}) < 0$ pour tout $\vec{x} \neq \vec{0}$
- on dit que Q est **indéfinie** si $Q(\vec{x})$ prend des valeurs positives et négatives pour tout $\vec{x} \neq \vec{0}$.

Théorème. Soit A une matrice symétrique de taille $n \times n$

et soit $Q(\vec{x}) = \vec{x}^T A \vec{x}$ sa forme quadratique associée. Alors

- Q est définie positive $\Leftrightarrow$ toutes les valeurs propres de A sont positives
- Q est définie négative $\Leftrightarrow$ toutes les valeurs propres de A sont négatives
- Q est indéfinie $\Leftrightarrow A$ a des valeurs propres positives et négatives.

Preuve. Le théorème des axes principaux nous permet d'écrire

$$Q(\vec{y}) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \dots + \lambda_n y_n^2$$

d'où le résultat. ■

Exemples.

1. La forme quadratique $Q(\vec{x}) = \vec{x}^T \vec{x} = \|\vec{x}\|^2$
est définie positive car $Q(\vec{x}) = \|\vec{x}\|^2 > 0$ pour tout $\vec{x} \neq \vec{0}$.
2. La forme quadratique $Q(\vec{x}) = 5x_1^2 + 4x_1x_2 + 5x_2^2$
est définie positive car les valeurs propres de $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$
sont $\lambda_1 = 7$ et $\lambda_2 = 3$.
3. La forme quadratique $Q(\vec{x}) = 2x_1^2 + 10x_1x_2 + 2x_2^2$
est indéfinie car les valeurs propres de $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$
sont $\lambda_1 = 7$ et $\lambda_2 = -3$.

$$\left[\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 5 \\ 5 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2 - 5^2 = (-3-\lambda)(7-\lambda) \right]$$