
7. Matrices symétriques et formes quadratiques

7.1. Diagonalisation des matrices symétriques.

Définition. Soit A une matrice. On dit que A est *symétrique* si

$$A^T = A$$

Remarque.

Il suit de la définition qu'une matrice symétrique est forcément carrée.

Exemples.

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \pi & e & \sqrt{2} \\ e & \pi & e \\ \sqrt{2} & e & \pi \end{bmatrix}$$

Considérons la matrice symétrique $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$.

Calculer les valeurs propres et les espaces propres associés.

Polynôme caractéristique:

$$p_c(\lambda) = \det(A - \lambda I) = (5 - \lambda)^2 - 2^2 = (5 - \lambda - 2)(5 - \lambda + 2) = (3 - \lambda)(7 - \lambda)$$

Valeurs propres: $\lambda_1 = 7$, $\lambda_2 = 3$ (toutes les deux de multiplicité 1)

$\Rightarrow A$ est diagonalisable.

Espaces propres:

$$\underline{\lambda_1=7}: A-7I = \begin{bmatrix} 5-7 & 2 \\ 2 & 5-7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

système associé: $x-y=0 \Leftrightarrow x=y$

$$E_7 = \text{Vect} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

$$\underline{\lambda_2=3}: A-3I = \begin{bmatrix} 5-3 & 2 \\ 2 & 5-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

système associé: $x+y=0 \Leftrightarrow x=-y$

$$E_3 = \text{Vect} \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

On constate que $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ et $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ sont orthogonaux: $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 0$

Par conséquent, $E_7^\perp = E_3$ et $E_3^\perp = E_7$

Théorème. Soit A une matrice symétrique de taille $n \times n$.

Si $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ sont deux vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes $\lambda_1 \neq \lambda_2$, alors $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ sont orthogonaux ($\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = 0$).

Preuve. Par hypothèse: $A\vec{u}_1 = \lambda_1 \vec{u}_1$ et $A\vec{u}_2 = \lambda_2 \vec{u}_2$, avec $\lambda_1 \neq \lambda_2$

$$\begin{aligned} \text{On a } \lambda_1 (\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2) &= (\lambda_1 \vec{u}_1) \cdot \vec{u}_2 = (A\vec{u}_1) \cdot \vec{u}_2 = (A\vec{u}_1)^T \vec{u}_2 \\ &= (\vec{u}_1^T A^T) \vec{u}_2 = \vec{u}_1^T (A^T \vec{u}_2) = \vec{u}_1^T (A\vec{u}_2) \\ &= \vec{u}_1^T (\lambda_2 \vec{u}_2) = \lambda_2 (\vec{u}_1^T \vec{u}_2) \end{aligned}$$

car A symétrique

$$\lambda_1 (\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2) = \lambda_2 (\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2)$$

$$\text{d'où } (\lambda_1 - \lambda_2) (\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2) = 0$$

Comme $\lambda_1 \neq \lambda_2$, nous obtenons $\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = 0$. ■

Rappel.

Une matrice A de taille $n \times n$ est diagonalisable s'il existe une matrice inversible P et une matrice diagonale D telles que

$$A = PDP^{-1}.$$

Les coefficients diagonaux de D sont les valeurs propres de A et les colonnes de P sont des vecteurs propres associés.

Nous avons vu que si A possède n valeurs propres distinctes, alors A est forcément diagonalisable, mais qu'elle peut être non diagonalisable si la multiplicité d'une valeur propre est plus grande que la dimension du sous-espace propre associé.

Rappel.

On dit qu'une matrice carrée U de taille $n \times n$ est orthogonale si U est inversible et $U^{-1} = U^T$

Remarque.

Comme par définition nous avons $U^T U = I_n$, les colonnes de U sont orthonormées et forment une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$.

De plus, comme $U U^T = I_n$, les colonnes de U^T (c-à-d.

les lignes de U) sont aussi orthonormées et forment une autre base orthonormale de $\mathbb{R}^n$.

Considérons à nouveau l'exemple $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$. Nous avons:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

Comme les vecteurs propres $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ et $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ sont orthogonaux, ils forment une base orthogonale de $\mathbb{R}^2$.

Par conséquent, les vecteurs $\vec{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ et $\vec{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ forment une base orthonormale de $\mathbb{R}^2$. Si on pose:

$$P = [\vec{u}_1 \ \vec{u}_2] = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

nous avons $A = P D P^{-1}$. Or, comme les colonnes de P sont orthonormales, la matrice P est en fait orthogonale ($P^{-1} = P^T$), d'où $A = P D P^T$.

Définition. Soit A une matrice carrée de taille $n \times n$.

On dit que A est une matrice **diagonalisable orthogonalement** s'il existe une matrice orthogonale P et une matrice diagonale D telles que

$$A = P D P^T$$

Remarque.

Si A est diagonalisable orthogonalement, alors A est diagonalisable car $P^{-1} = P^T$.

Par contre, si A est diagonalisable, alors A **n'est pas** forcément diagonalisable orthogonalement.

Si A est diagonalisable orthogonalement, alors :

$A = PDP^T$ où P est orthogonale et D est diagonale.

$$\text{d'où } A^T = (PDP^T)^T = (P^T)^T D^T P^T = PDP^T = A \Rightarrow A^T = A$$

Par conséquent, A est symétrique.

Il est possible de montrer que la réciproque est aussi vraie :

Théorème. Soit A une matrice de taille $n \times n$. Nous avons l'équivalence.

A est diagonalisable orthogonalement $\Leftrightarrow A$ est symétrique.

Conséquence.

Si A est symétrique, alors A est forcément diagonalisable.

Exemple.

Diagonaliser orthogonalement la matrice $A = \begin{bmatrix} 5 & -4 & -2 \\ -4 & 5 & -2 \\ -2 & -2 & 8 \end{bmatrix}$

Polynôme caractéristique:

$$p_c(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} 5-\lambda & -4 & -2 \\ -4 & 5-\lambda & -2 \\ -2 & -2 & 8-\lambda \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 \rightarrow L_1 - L_2} \det \begin{bmatrix} 9-\lambda & -9+\lambda & 0 \\ -4 & 5-\lambda & -2 \\ -2 & -2 & 8-\lambda \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{C_2 \rightarrow C_2 + C_1} \det \begin{bmatrix} 9-\lambda & 0 & 0 \\ -4 & 1-\lambda & -2 \\ -2 & -4 & 8-\lambda \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{dév. } L_1} (9-\lambda) \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & -2 \\ -4 & 8-\lambda \end{bmatrix}$$

$$= (9-\lambda) ((1-\lambda)(8-\lambda) - (-4)(-2)) = (9-\lambda)(\lambda^2 - 9\lambda + 8 - 8)$$

$$= (9-\lambda)(\lambda^2 - 9\lambda) = -\lambda(\lambda-9)^2$$

Valeurs propres: $\lambda_1 = 0$ (multiplicité $m_0 = 1$)

$\lambda_1 = 9$ (multiplicité $m_9 = 2$)

Espaces propres:

$\lambda_1 = 0$: $A - 0I = \begin{bmatrix} 5 & -4 & -2 \\ -4 & 5 & -2 \\ -2 & -2 & 8 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{L_1 \rightarrow L_1 + L_2 \\ L_3 \rightarrow \frac{1}{2}L_3}]{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -4 \\ -4 & 5 & -2 \\ -1 & -1 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{L_2 \rightarrow L_2 + 4L_1 \\ L_3 \rightarrow L_3 + L_1}]{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 0 & 9 & -18 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\xrightarrow[\substack{L_2 \rightarrow \frac{1}{9}L_2}]{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{L_1 \rightarrow L_1 - L_2}]{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

système associé: $\begin{cases} x - 2z = 0 \\ y - 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2z \\ y = 2z \end{cases}$

solution générale: $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, avec $t \in \mathbb{R}$

$E_0 = \text{Vect} \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} (= \text{Nul}(A))$

Vérification: $\begin{bmatrix} 5 & -4 & -2 \\ -4 & 5 & -2 \\ -2 & -2 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 - 8 - 2 \\ -8 + 10 - 2 \\ -4 - 4 + 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$\underline{\lambda_2 = 9}: \quad A - 9I = \begin{bmatrix} 5-9 & -4 & -2 \\ -4 & 5-9 & -2 \\ -2 & -2 & 8-9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -4 & -2 \\ -4 & -4 & -2 \\ -2 & -2 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

système associé: $2x + 2y + z = 0 \Leftrightarrow x = -y - \frac{1}{2}z$

solution générale: $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \text{ avec } s, t \in \mathbb{R}$

$$E_9 = \text{Vect} \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$$

Vérification: $\begin{bmatrix} 5 & -4 & -2 \\ -4 & 5 & -2 \\ -2 & -2 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5-4 \\ 4+5 \\ 2-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 \\ 9 \\ 0 \end{bmatrix} = 9 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 5 & -4 & -2 \\ -4 & 5 & -2 \\ -2 & -2 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5-4 \\ 4-4 \\ 2+16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 \\ 0 \\ 18 \end{bmatrix} = 9 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Les vecteurs $\vec{x}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ et $\vec{x}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ ne sont pas orthogonaux: $\vec{x}_1 \cdot \vec{x}_2 = 1$.

On utilise le procédé de Gram-Schmidt pour trouver une base orthogonale de $E_g = \text{Vect}\{\vec{x}_1, \vec{x}_2\}$.

On pose $\vec{v}_1 = \vec{x}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ et $W_1 = \text{Vect}\{\vec{v}_1\}$ ($= \text{Vect}\{\vec{x}_1\}$)

On calcule $\text{proj}_{W_1} \vec{x}_2 = \frac{\vec{x}_2 \cdot \vec{v}_1}{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_1} \vec{v}_1 = \frac{1+0+0}{1+1+0} \vec{v}_1 = \frac{1}{2} \vec{v}_1$

et $\vec{x}_2 - \text{proj}_{W_1} \vec{x}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/2 \\ -1/2 \\ 2 \end{bmatrix}$

On pose $\vec{v}_2 = 2(\vec{x}_2 - \text{proj}_{W_1} \vec{x}_2) = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$ et $E_g = \text{Vect}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$

On vérifie: $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 1 - 1 + 0 = 0$

Conséquence: $\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix} \right\}$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}^3$

Comme $\left\| \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\| = \sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{9} = 3$

$$\left\| \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{2}$$

$$\left\| \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix} \right\| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + 4^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

l'ensemble $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\} = \left\{ \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \frac{1}{3\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix} \right\}$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}^3$ et nous pouvons écrire $A = P D P^T$ où:

$$P = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{3\sqrt{2}} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{3\sqrt{2}} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{4}{3\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \frac{1}{3\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 2\sqrt{2} & -3 & -1 \\ 2\sqrt{2} & 3 & -1 \\ \sqrt{2} & 0 & 4 \end{bmatrix} \text{ et } D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$