

Matrices orthogonales.

Soit U une matrice de taille $m \times n$:

$$U = [\vec{u}_1 \ \vec{u}_2 \ \dots \ \vec{u}_n], \text{ avec } \vec{u}_j \in \mathbb{R}^m \text{ pour tout } j \in \{1, \dots, n\}$$

Théorème.

Les n colonnes d'une matrice U de taille $m \times n$ sont orthonormées si et seulement si $U^T U = I_n$.

Attention.

La matrice UU^T est une matrice de taille $m \times m$ et est associée à la projection orthogonale sur le sous-espace vectoriel $W = \text{Vect}\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n\} \subset \mathbb{R}^m$.

Théorème .

Soit U une matrice de taille $m \times n$ dont les colonnes sont orthonormées.

Si $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$, alors :

1. $\|U\vec{x}\| = \|\vec{x}\|$
2. $(U\vec{x}) \cdot (U\vec{y}) = \vec{x} \cdot \vec{y}$
3. $(U\vec{x}) \cdot (U\vec{y}) = 0$ si et seulement si $\vec{x} \cdot \vec{y} = 0$.

Preuve. Voir Exercice 11, série 13. ■

Conséquence.

L'application linéaire $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ définie par $T(\vec{x}) = U\vec{x}$ conserve les longueurs et l'orthogonalité.

Définition.

Soit A une matrice carrée de taille $n \times n$.

On dit que A est une **matrice orthogonale** si A est inversible et

$$A^{-1} = A^T$$

Remarque.

Comme par définition nous avons $A^T A = I_n$, les colonnes de A sont orthonormées et forment une **base orthonormale** de $\mathbb{R}^n$.

De plus, comme $A A^T = I_n$, les colonnes de A^T (c-à-d.

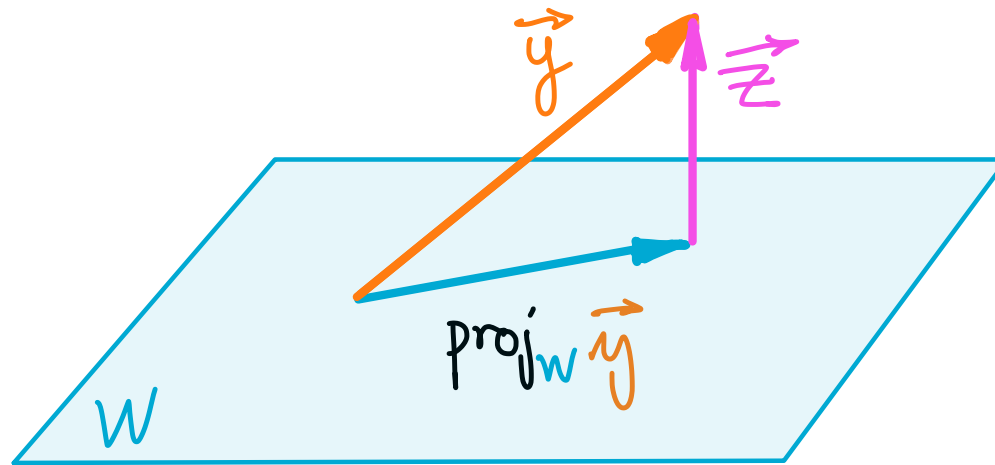
les lignes de A) sont aussi orthonormées et forment une autre base orthonormale de $\mathbb{R}^n$.

Théorème de la meilleure approximation.

Soit W un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ et $\vec{y} \in \mathbb{R}^n$. On a :

$$\|\vec{y} - \text{proj}_W \vec{y}\| < \|\vec{y} - \vec{w}\|$$

pour tout $\vec{w} \in W$, $\vec{w} \neq \text{proj}_W \vec{y}$.



Le vecteur $\text{proj}_W \vec{y}$ est appelé **meilleure approximation** (quadratique) de $\vec{y}$ par un élément de W .

Preuve.

Comme $\vec{y} - \text{proj}_W \vec{y} \in W^\perp$

et $\vec{w} - \text{proj}_W \vec{y} \in W$ pour tout $\vec{w} \in W$

nous pouvons écrire

$$\vec{y} - \vec{w} = (\vec{y} - \text{proj}_W \vec{y}) + (\text{proj}_W \vec{y} - \vec{w})$$

et le théorème de Pythagore nous donne

$$\begin{aligned} \|\vec{y} - \vec{w}\|^2 &= \|\vec{y} - \text{proj}_W \vec{y}\|^2 + \|\text{proj}_W \vec{y} - \vec{w}\|^2 \\ &> \|\vec{y} - \text{proj}_W \vec{y}\|^2 \quad \underbrace{> 0 \text{ si } \vec{w} \neq \text{proj}_W \vec{y}} \end{aligned}$$

d'où $\|\vec{y} - \vec{w}\| > \|\vec{y} - \text{proj}_W \vec{y}\|$ pour tout $\vec{w} \in W, \vec{w} \neq \text{proj}_W \vec{y}$. ■

Nous venons de voir que $\text{proj}_W \vec{y}$ peut se calculer facilement si l'on dispose d'une base orthogonale de W .

Question. Comment trouver une telle base ?

Réponse:

6.4. Le procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt.

Considérons un premier exemple (très simple):

Les vecteurs $\vec{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ et $\vec{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ ne sont pas orthogonaux car $\vec{x}_1 \cdot \vec{x}_2 = 1+2=3 \neq 0$.

Soit $W = \text{Vect} \{ \vec{x}_1, \vec{x}_2 \}$ (ici $W = \mathbb{R}^2$)

On pose $\vec{v}_1 = \vec{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ et $W_1 = \text{Vect} \{ \vec{v}_1 \}$

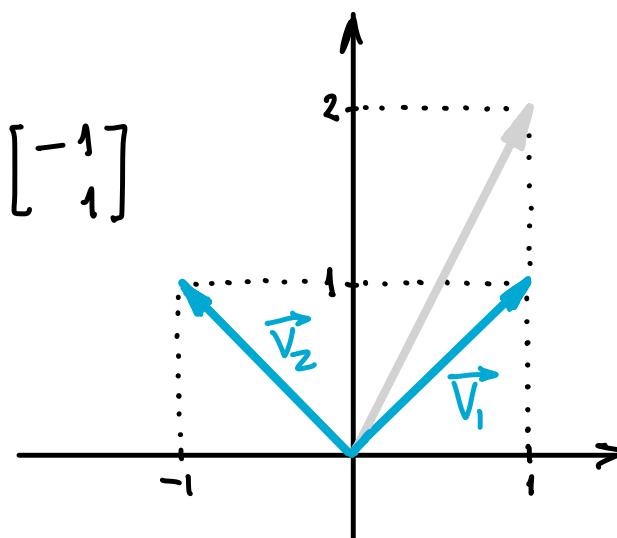
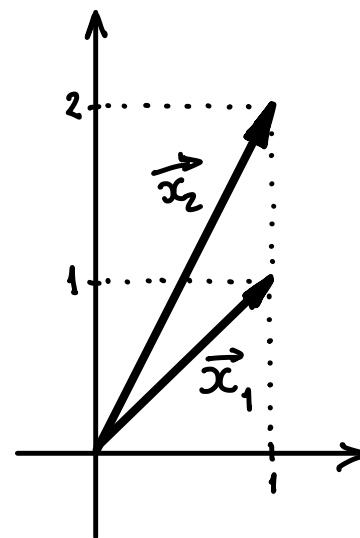
On a $\text{proj}_{W_1} \vec{x}_2 = \frac{\vec{x}_2 \cdot \vec{v}_1}{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_1} \vec{v}_1 = \frac{1+2}{1+1} \vec{v}_1 = \frac{3}{2} \vec{v}_1$

et $\vec{x}_2 - \text{proj}_{W_1} \vec{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} - \frac{3}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Le vecteur $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ est orthogonal à $\vec{v}_1$,

car $\vec{v}_2 \cdot \vec{v}_1 = -1+1=0$.

Par conséquent $\{ \vec{v}_1, \vec{v}_2 \} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ est une base orthogonale de W .



Remarque.

Si l'on pose $\vec{u}_1 = \vec{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ et $W_1 = \text{Vect}\{\vec{u}_1\}$

$$\text{On a } \text{proj}_{W_1} \vec{x}_1 = \frac{\vec{x}_1 \cdot \vec{u}_1}{\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1} \vec{u}_1 = \frac{1+2}{1+4} \vec{u}_1 = \frac{3}{5} \vec{u}_1$$

$$\text{et } \vec{x}_1 - \text{proj}_{W_1} \vec{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{3}{5} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/5 \\ -1/5 \end{bmatrix} = -\frac{1}{5} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

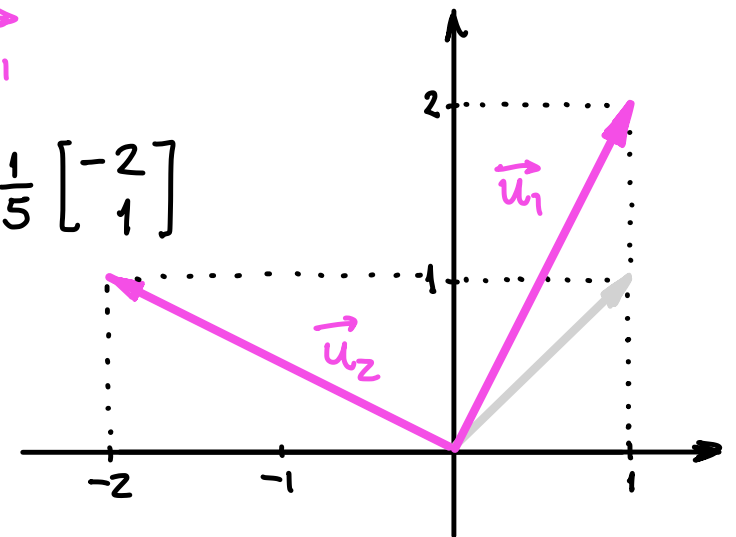
Le vecteur $\vec{u}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ est orthogonal à $\vec{u}_1$

$$\text{car } \vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = -2 + 2 = 0.$$

Par conséquent $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ est une autre base orthogonale de W .

Attention :

L'ordre dans lequel on choisit les vecteurs est important.



Procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt.

1. On se donne une base $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_k\}$ de W .
2. On pose $\vec{v}_1 = \vec{x}_1$ et on note $W_1 = \text{Vect}\{\vec{v}_1\} (= \text{Vect}\{\vec{x}_1\})$
3. On calcule $\text{proj}_{W_1} \vec{x}_2$ et $\vec{x}_2 - \text{proj}_{W_1} \vec{x}_2$
4. On pose $\vec{v}_2 = \vec{x}_2 - \text{proj}_{W_1} \vec{x}_2$ (ou un multiple de ce vecteur de sorte que $\vec{v}_2$ ait des composantes entières).
et on note $W_2 = \text{Vect}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\} (= \text{Vect}\{\vec{x}_1, \vec{x}_2\})$

Par construction, $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 0$ et $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ est une base orthogonale de W_2 .

5. On calcule $\text{proj}_{W_2} \vec{x}_3$ et $\vec{x}_3 - \text{proj}_{W_2} \vec{x}_3$

6. On pose $\vec{v}_3 = \vec{x}_3 - \text{proj}_{W_2} \vec{x}_3$ (ou un multiple de ce vecteur de sorte que $\vec{v}_3$ ait des composantes entières).

et on note $W_3 = \text{Vect}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\} (= \text{Vect}\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3\})$

Par construction, $\vec{v}_3 \cdot \vec{v}_1 = 0$ et $\vec{v}_3 \cdot \vec{v}_2 = 0$ et $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ est une base orthogonale de W_3 .

7. On continue de la sorte jusqu'à la dernière étape:

On pose $\vec{v}_k = \vec{x}_k - \text{proj}_{W_{k-1}} \vec{x}_k$ (ou un multiple de ce vecteur de sorte que $\vec{v}_k$ ait des composantes entières).

L'ensemble $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k\}$ est une base orthogonale de W .

Exemple.

$$\text{Soient } \vec{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \vec{x}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \vec{x}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Trouver une base orthogonale de $W = \text{Vect}\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3\}$

$$\text{On pose } \vec{v}_1 = \vec{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ et } W_1 = \text{Vect}\{\vec{v}_1\} (= \text{Vect}\{\vec{x}_1\})$$

$$\text{On calcule } \text{proj}_{W_1} \vec{x}_2 = \frac{\vec{x}_2 \cdot \vec{v}_1}{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_1} \vec{v}_1 = \frac{-1+2+0+0+1}{1+1+1+0+1} \vec{v}_1 = \frac{2}{4} \vec{v}_1 = \frac{1}{2} \vec{v}_1$$

$$\text{et } \vec{x}_2 - \text{proj}_{W_1} \vec{x}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3/2 \\ 3/2 \\ 1 \\ -1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -3 \\ 3 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{On pose } \vec{v}_2 = 2(\vec{x}_2 - \text{proj}_{W_1} \vec{x}_2) = \begin{bmatrix} -3 \\ 3 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ et } W_2 = \text{Vect}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$$

On vérifie: $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = -3 + 3 + 0 - 1 + 1 = 0$

On calcule $\text{proj}_{W_2} \vec{x}_3 = \frac{\vec{x}_3 \cdot \vec{v}_1}{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_1} \vec{v}_1 + \frac{\vec{x}_3 \cdot \vec{v}_2}{\vec{v}_2 \cdot \vec{v}_2} \vec{v}_2$

$$= \frac{0 + 1 + 0 + 1 + 2}{1 + 1 + 1 + 0 + 1} \vec{v}_1 + \frac{0 + 3 + 2 - 1 + 2}{9 + 9 + 4 + 1 + 1} \vec{v}_2 = \vec{v}_1 + \frac{1}{4} \vec{v}_2$$

et $\vec{x}_3 - \text{proj}_{W_2} \vec{x}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -3 \\ 3 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/4 \\ -3/4 \\ 1/2 \\ 1/4 \\ 3/4 \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$

On pose $\vec{v}_3 = 4(\vec{x}_3 - \text{proj}_{W_2} \vec{x}_3) = \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$

On vérifie: $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_3 = -1 - 3 + 0 + 1 + 3 = 0$ et $\vec{v}_2 \cdot \vec{v}_3 = 3 - 9 + 4 - 1 + 3 = 0$

Par conséquent, $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 3 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$ est une base orthogonale de W .

Factorisation QR

Théorème. Soit A une matrice de taille $m \times n$ dont les colonnes sont linéairement indépendantes (c'est-à-dire, telle que $\text{rang}(A) = n$)

Alors la matrice A peut s'écrire sous la forme

$$A = QR$$

où Q est une matrice de taille $m \times n$ dont les colonnes forment une base orthonormale de $\text{Col}(A)$

et R est une matrice de taille $n \times n$ triangulaire supérieure inversible à coefficients diagonaux strictement positifs.

Comme par hypothèse $\text{rang}(A) = n$, les n colonnes de A forment une base $\{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n\}$ de $\text{Col}(A)$.

Le procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt nous fournit une base orthogonale $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$ de $\text{Col}(A)$

Par conséquent, les vecteurs $\vec{u}_1 = \frac{\vec{v}_1}{\|\vec{v}_1\|}$, $\vec{u}_2 = \frac{\vec{v}_2}{\|\vec{v}_2\|}$, $\dots$, $\vec{u}_n = \frac{\vec{v}_n}{\|\vec{v}_n\|}$ forment une base orthonormale de $\text{Col}(A)$.

On pose $Q = [\vec{u}_1 \ \vec{u}_2 \ \dots \ \vec{u}_n]$

Comme par construction $Q^T Q = I_n$ nous avons:

$$Q^T A = Q^T (QR) = (Q^T Q) R = R$$

d'où $R = Q^T A$

Exemple.

Trouver une factorisation QR de $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

Nous avons trouvé que

$$\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 3 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$$

est une base orthogonale de $\text{Col}(A)$.

$$\left. \begin{array}{l} \|\vec{v}_1\|^2 = 1+1+0+1+1 = 4 \\ \|\vec{v}_2\|^2 = 9+9+4+1+1 = 24 \\ \|\vec{v}_3\|^2 = 1+9+4+1+9 = 24 \end{array} \right\} \Rightarrow \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\} = \left\{ \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \frac{1}{2\sqrt{6}} \begin{bmatrix} -3 \\ 3 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \frac{1}{2\sqrt{6}} \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$$

est une base orthonormale de $\text{Col}(A)$.

On pose $Q = \frac{1}{2\sqrt{6}} \begin{bmatrix} \sqrt{6} & -3 & -1 \\ \sqrt{6} & 3 & -3 \\ 0 & 2 & 2 \\ \sqrt{6} & -1 & 1 \\ \sqrt{6} & 1 & 3 \end{bmatrix}$

et $R = Q^T A = \frac{1}{2\sqrt{6}} \begin{bmatrix} \sqrt{6} & \sqrt{6} & 0 & \sqrt{6} & \sqrt{6} \\ -3 & 3 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & -3 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

$$= \frac{1}{2\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 4\sqrt{6} & 2\sqrt{6} & 4\sqrt{6} \\ 0 & 12 & 6 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow R = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & \sqrt{6} & \frac{1}{2}\sqrt{6} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}\sqrt{6} \end{bmatrix}$$

Remarque.

Tout comme la factorisation LU , la factorisation QR est très utile dans la résolution numérique de systèmes $A\vec{x}=\vec{b}$, où A est une matrice de taille $m \times n$ avec m, n grands. La factorisation QR est aussi utilisée pour le calcul des valeurs propres de la matrice carrée A .