

Corollaire. Si W est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$, alors

$$(W^\perp)^\perp = W$$

Preuve Nous avons déjà montré $W \subset (W^\perp)^\perp$.

Il reste à montrer $(W^\perp)^\perp \subset W$.

Soit donc $\vec{y} \in (W^\perp)^\perp \subset \mathbb{R}^n$.

Le théorème de la projection orthogonale nous donne:

$$\vec{y} = \hat{y} + \vec{z}, \text{ avec } \hat{y} \in W \text{ et } \vec{z} \in W^\perp$$

Comme $\vec{z} \in W^\perp$ et $\vec{y} \in (W^\perp)^\perp$, nous avons $\vec{y} \cdot \vec{z} = 0$

$$\text{d'où } 0 = \vec{y} \cdot \vec{z} = (\hat{y} + \vec{z}) \cdot \vec{z} = \hat{y} \cdot \vec{z} + \vec{z} \cdot \vec{z} = 0 + \vec{z} \cdot \vec{z}$$

Ainsi $\vec{z} \cdot \vec{z} = 0$ et $\vec{z} = \vec{0}$, ce qui implique $\vec{y} = \hat{y} \in W$ ■

Remarques.

- L'unicité de la décomposition $\vec{y} = \hat{y} + \vec{z}$ montre que la projection $\text{proj}_W \vec{y}$ ne dépend que du sous-espace vectoriel W et non pas de la base (orthogonale) de W choisie.
- Si $\vec{y} \in W$, alors $\text{proj}_W \vec{y} = \vec{y}$.

Ceci nous donne un critère pratique pour caractériser l'appartenance d'un vecteur à un sous-espace vectoriel.

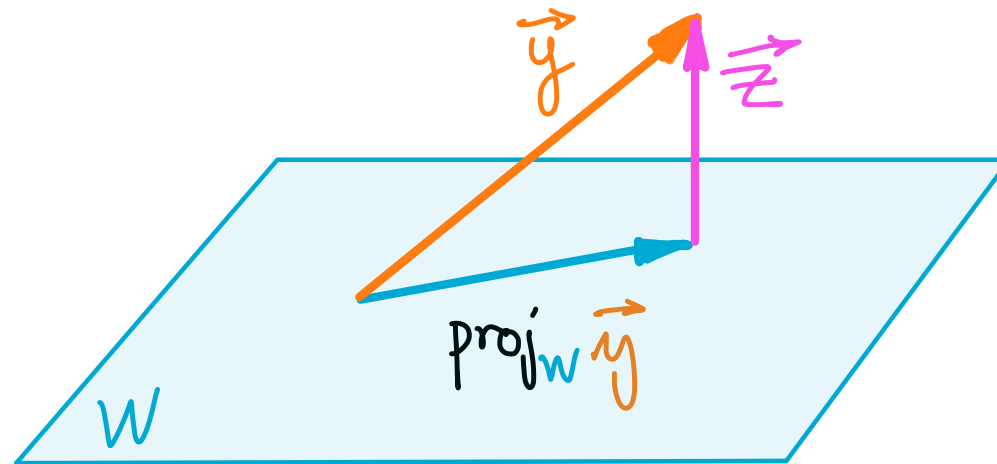
Définition.

Soit W un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ de dimension $k > 0$.

Soit $\vec{y} \in \mathbb{R}^n$ un vecteur quelconque.

On définit la *distance* entre $\vec{y}$ et W , notée $\text{dist}(\vec{y}, W)$, par :

$$\text{dist}(\vec{y}, W) = \|\vec{y} - \text{proj}_W \vec{y}\| = \|\vec{z}\|$$



Soit W un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ de dimension $k > 0$,

On peut montrer que l'application $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ définie par

$$T(\vec{v}) = \text{proj}_W \vec{v}$$

est linéaire. Elle est appelée la **projection orthogonale** sur W .

$$\text{Comme } T(\vec{v}) = \vec{0} \Leftrightarrow \frac{\vec{v} \cdot \vec{u}_1}{\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1} \vec{u}_1 + \dots + \frac{\vec{v} \cdot \vec{u}_k}{\vec{u}_k \cdot \vec{u}_k} \vec{u}_k = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \vec{v} \cdot \vec{u}_j = 0 \text{ pour tout } j \in \{1, \dots, k\}$$

$$\Leftrightarrow \vec{v} \in W^\perp$$

nous avons $\text{Ker}(T) = W^\perp$

D'autre part, $\text{Im}(T) = W$.

Comme $\dim(W) = k$, le théorème du rang nous donne $\dim(W^\perp) = n - k$

Par construction,

- Si $\vec{v} \in W$, alors $\text{proj}_W \vec{v} = \vec{v}$. Ainsi $\vec{v}$ est un vecteur propre de proj_W de valeur propre associée $\lambda = 1$.
- Si $\vec{v} \in W^\perp$, alors $\text{proj}_W \vec{v} = \vec{0}$. Ainsi $\vec{v}$ est un vecteur propre de proj_W de valeur propre associée $\lambda = 0$.

Soit $\{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_k\}$ une base de W (pas forcément orthogonale)

et soit $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{n-k}\}$ une base de $W^\perp$ (pas forcément orthogonale)

L'ensemble $B = \{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_k, \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{n-k}\}$ est une base de $\mathbb{R}^n$

et la matrice de $T = \text{proj}_W$ par rapport à la base B est diagonale:

$$A_T^B = \begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & \ddots & 0 \\ & & 0 & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{bmatrix} \left. \begin{array}{l} \text{ } \\ \text{ } \\ \text{ } \\ \text{ } \end{array} \right\} \begin{array}{l} k \text{ fois} \\ n-k \text{ fois} \end{array}$$

Théorème. Si $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k\}$ est une base orthonormale de W , alors

$$\text{proj}_W \vec{y} = (\vec{y} \cdot \vec{u}_1) \vec{u}_1 + (\vec{y} \cdot \vec{u}_2) \vec{u}_2 + \dots + (\vec{y} \cdot \vec{u}_k) \vec{u}_k$$

De plus, si U est la matrice de taille $n \times k$ suivante:

$$U = [\vec{u}_1 \ \vec{u}_2 \ \dots \ \vec{u}_k]$$

alors nous avons

$$\text{proj}_W \vec{y} = (UU^T) \vec{y} \quad \text{pour tout } \vec{y} \in \mathbb{R}^n$$

Autrement dit, la matrice $A = UU^T$ est la matrice canoniquement associée à la projection orthogonale sur W

$$T = \text{proj}_W: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

Preuve. Le théorème de la projection orthogonale nous dit que tout vecteur $\vec{y} \in \mathbb{R}^n$ s'écrit de manière unique

$$\vec{y} = \hat{y} + \vec{z}, \text{ où } \hat{y} = \text{proj}_W \vec{y} \in W \text{ et } \vec{z} \in W^\perp.$$

De plus, comme $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k\}$ est une base orthonormale de W , nous trouvons:

$$\hat{y} = \text{proj}_W \vec{y} = (\vec{y} \cdot \vec{u}_1) \vec{u}_1 + (\vec{y} \cdot \vec{u}_2) \vec{u}_2 + \dots + (\vec{y} \cdot \vec{u}_k) \vec{u}_k$$

Comme $U = [\vec{u}_1 \ \vec{u}_2 \ \dots \ \vec{u}_k]$ et $W = \text{Vect} \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_k\}$ nous avons :

$$W = \text{Col}(U).$$

Par conséquent,

$$W^\perp = (\text{Col}(U))^\perp = \text{Nul}(U^T)$$

Comme $\hat{y} \in W = \text{Col}(U)$, on a

$$\hat{y} = U\vec{x} \text{ pour un certain } \vec{x} \in \mathbb{R}^k$$

Comme $\vec{z} \in W^\perp = \text{Nul}(U^T)$, on a $U^T\vec{z} = \vec{0}$.

$$\begin{aligned} \text{Ainsi } U^T \vec{y} &= U^T(\hat{y} + \vec{z}) = U^T\hat{y} + U^T\vec{z} = U^T(U\vec{x}) + \vec{0} \\ &= (U^T U)\vec{x} \end{aligned}$$

Comme les k colonnes de U forment un ensemble orthonormal, on a $U^T U = I_k$ ce qui nous donne

$$\vec{x} = U^T \vec{y}$$

d'où

$$\text{proj}_W \vec{y} = \hat{y} = U\vec{x} = U(U^T \vec{y}) = (UU^T)\vec{y}$$

