

Le théorème suivant nous dit que lorsqu'on dispose d'une base orthogonale de W , le calcul des coordonnées d'un vecteur $\vec{w} \in W$ dans cette base est très simple :

Théorème. Soit W un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ de dimension $0 < k \leq n$.

Soit $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k\}$ une base orthogonale de W . Alors tout élément $\vec{w} \in W$ s'écrit de manière unique :

$$\vec{w} = \frac{\vec{w} \cdot \vec{u}_1}{\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1} \vec{u}_1 + \frac{\vec{w} \cdot \vec{u}_2}{\vec{u}_2 \cdot \vec{u}_2} \vec{u}_2 + \dots + \frac{\vec{w} \cdot \vec{u}_k}{\vec{u}_k \cdot \vec{u}_k} \vec{u}_k$$

Preuve.

Soit $\vec{w} \in W$. Comme $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k\}$ est une base de W on a

$$\vec{w} = \alpha_1 \vec{u}_1 + \alpha_2 \vec{u}_2 + \dots + \alpha_k \vec{u}_k \quad (\text{écriture unique})$$

$$\begin{aligned} \text{d'où } \vec{w} \cdot \vec{u}_1 &= (\alpha_1 \vec{u}_1 + \alpha_2 \vec{u}_2 + \dots + \alpha_k \vec{u}_k) \cdot \vec{u}_1 \\ &= \alpha_1 \vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1 + \alpha_2 \underbrace{\vec{u}_2 \cdot \vec{u}_1}_{=0} + \dots + \alpha_k \underbrace{\vec{u}_k \cdot \vec{u}_1}_{=0} \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi, } \vec{w} \cdot \vec{u}_1 = \alpha_1 \vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1$$

$$\text{ce qui nous donne: } \alpha_1 = \frac{\vec{w} \cdot \vec{u}_1}{\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1}$$

On trouve $\alpha_2, \dots, \alpha_k$ de manière analogue en calculant

$$\vec{w} \cdot \vec{u}_j, \text{ avec } j \in \{2, \dots, k\}$$



Exemple.

Les vecteurs $\vec{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ et $\vec{u}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ sont orthogonaux et non nuls.

Ainsi, $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}^2$.

Soit $\vec{w} = \begin{bmatrix} 5 \\ 9 \end{bmatrix}$. Nous avons:

$$\begin{aligned}\vec{w} &= \frac{\vec{w} \cdot \vec{u}_1}{\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1} \vec{u}_1 + \frac{\vec{w} \cdot \vec{u}_2}{\vec{u}_2 \cdot \vec{u}_2} \vec{u}_2 \\ &= \frac{5 \cdot 1 + 9 \cdot 1}{1^2 + 1^2} \vec{u}_1 + \frac{5 \cdot 1 + 9 \cdot (-1)}{1^2 + (-1)^2} \vec{u}_2 \\ &= \frac{14}{2} \vec{u}_1 + \frac{-4}{2} \vec{u}_2 = 7\vec{u}_1 - 2\vec{u}_2\end{aligned}$$

$$\Rightarrow [\vec{w}]_B = \begin{bmatrix} 7 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Calcul alternatif:

$$\vec{w} = \alpha_1 \vec{u}_1 + \alpha_2 \vec{u}_2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 9 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 5 \\ 0 & -2 & 4 \end{array} \right] \sim \dots \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & -2 \end{array} \right]$$

Définition. Un ensemble $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_k\}$ de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ est appelé **ensemble orthonormal** si :

- $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_k\}$ est un ensemble orthogonal
- les vecteurs $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_k$ sont unitaires :
$$\|\vec{u}_j\| = 1, \text{ pour } j \in \{1, \dots, k\}$$

Exemples.

1. L'ensemble $\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix} \right\}$ n'est pas orthonormal.
2. L'ensemble $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$ n'est pas orthonormal.
3. Si $\mathcal{E} = \{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$ alors tout sous-ensemble de $\mathcal{E}$ est orthonormal.

Remarque.

Par construction, si $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k\}$ est un ensemble orthonormal, alors les vecteurs $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k$ sont non nuls et de ce fait, $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k\}$ est toujours linéairement indépendant.

Par conséquent, si $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k\}$ est un ensemble orthonormal, alors $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k\}$ est une base de $\text{Vect}\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k\}$.

Définition. Soit W un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ de dimension $0 < k \leq n$.

On dit que l'ensemble $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k\}$ est une **base orthonormale**

(ou **base orthonormée**) de W si $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k\}$ est une base de W

qui est un ensemble orthonormal.

Exemple

La base canonique de $\mathbb{R}^n$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$.

Remarque.

Si $\{\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_k\}$ est une base orthogonale de W , alors l'ensemble

$\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k\}$, où $\vec{u}_j = \frac{\vec{w}_j}{\|\vec{w}_j\|}$ pour $j=1, \dots, k$, est une base

orthonormale de W .

Théorème. Soit W un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ de dimension $0 < k \leq n$.

Soit $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k\}$ une base orthonormale de W . Alors tout élément $\vec{w} \in W$ s'écrit de manière unique:

$$\vec{w} = (\vec{w} \cdot \vec{u}_1) \vec{u}_1 + (\vec{w} \cdot \vec{u}_2) \vec{u}_2 + \dots + (\vec{w} \cdot \vec{u}_k) \vec{u}_k$$

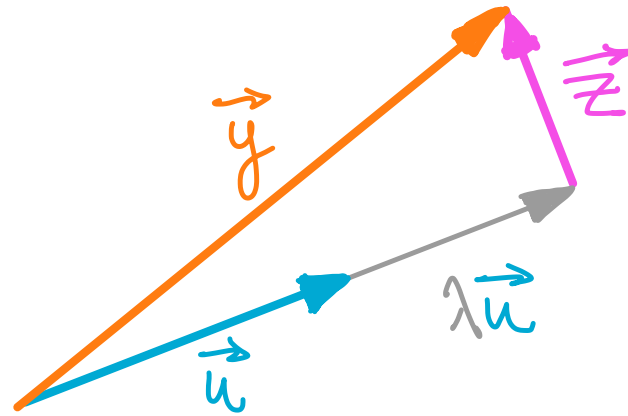
6.3. Projection orthogonale

Soit $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$ un vecteur non nul fixé.

On aimerait écrire un vecteur arbitraire $\vec{y} \in \mathbb{R}^n$ comme la somme d'un multiple de $\vec{u}$ et d'un vecteur orthogonal à $\vec{u}$:

$$\vec{y} = \lambda \vec{u} + \vec{z} \text{ avec } \vec{z} \cdot \vec{u} = 0 \text{ et } \lambda \in \mathbb{R}$$

Géométriquement :



Comme $\vec{z} = \vec{y} - \lambda \vec{u}$

nous avons $\vec{u} \cdot \vec{z} = \vec{u} \cdot (\vec{y} - \lambda \vec{u})$

$$0 = \vec{u} \cdot \vec{y} - \lambda (\vec{u} \cdot \vec{u})$$

d'où $\lambda = \frac{\vec{u} \cdot \vec{y}}{\vec{u} \cdot \vec{u}}$

Ainsi, le vecteur $\vec{y} \in \mathbb{R}^n$ peut s'écrire:

$$\vec{y} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{y}}{\vec{u} \cdot \vec{u}} \vec{u} + \vec{z}$$

Définition. Soit $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$ un vecteur non nul.

La projection orthogonale de $\vec{y} \in \mathbb{R}^n$ sur $W = \text{Vect}\{\vec{u}\}$, notée $\text{proj}_W \vec{y}$ ou $\text{proj}_{\vec{u}} \vec{y}$, est le vecteur

$$\text{proj}_W \vec{y} = \text{proj}_{\vec{u}} \vec{y} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{y}}{\vec{u} \cdot \vec{u}} \vec{u}$$

Comme par construction le vecteur $\vec{z} = \vec{y} - \text{proj}_{\vec{u}} \vec{y}$ est orthogonal à W , nous avons $\vec{z} \in W^\perp$ et nous pouvons exprimer le vecteur $\vec{y}$ comme une somme d'un vecteur dans W et d'un vecteur dans $W^\perp$:

$$\vec{y} = \underbrace{\text{proj}_{\vec{u}} \vec{y}}_{\in W} + \underbrace{\vec{z}}_{\in W^\perp}$$

Remarque.

Soit $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$ un vecteur non nul et $W = \text{Vect}\{\vec{u}\}$.

On peut montrer que l'application $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ définie par

$$T(\vec{v}) = \text{proj}_{\vec{u}} \vec{v} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\vec{u} \cdot \vec{u}} \vec{u}$$

est linéaire (voir exercice 15, série 12). Elle est appelée la projection orthogonale sur $W = \text{Vect}\{\vec{u}\}$.

Comme $T(\vec{v}) = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \vec{v} \in W^\perp$

nous avons $\text{Ker}(T) = W^\perp$

Comme $T(\vec{v})$ est un multiple de $\vec{u}$ pour tout $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$

nous avons $\text{Im}(T) = W$

L'associativité du produit matriciel nous permet d'écrire :

$$\underbrace{(\vec{u}\vec{u}^T)}_{\text{matrice de taille } n \times n} \underbrace{\vec{v}}_{\text{nombre réel}} = \vec{u} (\underbrace{\vec{u}^T \vec{v}}_{\text{nombre réel}}) = \vec{u} (\vec{u} \cdot \vec{v}) = (\vec{u} \cdot \vec{v}) \vec{u}, \text{ car } \vec{u} \cdot \vec{v} \in \mathbb{R}$$

Ainsi,

$$T(\vec{v}) = \text{proj}_{\vec{u}} \vec{v} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\vec{u} \cdot \vec{u}} \vec{u} = \frac{1}{\vec{u} \cdot \vec{u}} (\vec{u}\vec{u}^T) \vec{v}$$

Par conséquent, la matrice canoniquement associée à l'application linéaire $T = \text{proj}_{\vec{u}}$ est :

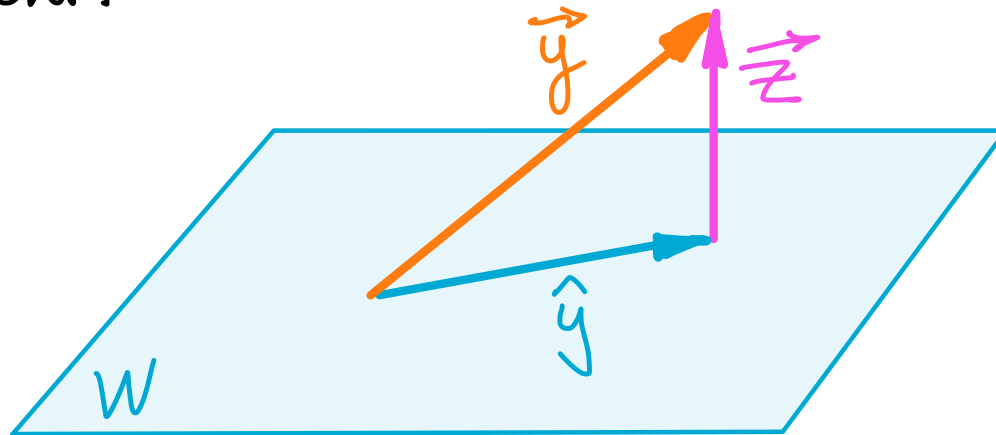
$$A_T = \frac{1}{\vec{u} \cdot \vec{u}} \vec{u}\vec{u}^T = \frac{\vec{u}\vec{u}^T}{\vec{u}^T \vec{u}}$$

Soit maintenant $W \subset \mathbb{R}^n$ un sous espace vectoriel de dimension $k \geq 2$,

On aimerait écrire un vecteur arbitraire $\vec{y} \in \mathbb{R}^n$ comme la somme d'un vecteur $\hat{y} \in W$ et d'un vecteur $\vec{z} \in W^\perp$:

$$\vec{y} = \hat{y} + \vec{z}$$

Géométriquement:



Théorème de la projection orthogonale.

Soit W un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ de dimension $k > 0$.

Tout vecteur $\vec{y} \in \mathbb{R}^n$ s'écrit de manière unique sous la forme :

$$\vec{y} = \hat{y} + \vec{z} \quad \text{où } \hat{y} \in W \text{ et } \vec{z} \in W^\perp.$$

De plus, si $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k\}$ est une base orthogonale de W , alors nous avons une formule explicite pour calculer $\hat{y}$:

$$\hat{y} = \frac{\vec{y} \cdot \vec{u}_1}{\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1} \vec{u}_1 + \frac{\vec{y} \cdot \vec{u}_2}{\vec{u}_2 \cdot \vec{u}_2} \vec{u}_2 + \dots + \frac{\vec{y} \cdot \vec{u}_k}{\vec{u}_k \cdot \vec{u}_k} \vec{u}_k \quad (*)$$

Le vecteur $\hat{y}$ est appelé la projection orthogonale de $\vec{y} \in \mathbb{R}^n$ sur W et on le note $\text{proj}_W \vec{y}$.

Preuve.

Par construction, le vecteur $\hat{y}$ appartient à W car il s'écrit comme combinaison linéaire des vecteurs $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k\}$.

A voir: $\vec{z} = \vec{y} - \hat{y} \in W^\perp$

Il faut donc montrer $\vec{z} \cdot \vec{u}_j = 0$, pour $j \in \{1, \dots, k\}$

On a

$$\begin{aligned}\vec{z} \cdot \vec{u}_1 &= (\vec{y} - \hat{y}) \cdot \vec{u}_1 = \vec{y} \cdot \vec{u}_1 - \hat{y} \cdot \vec{u}_1 \\&= \vec{y} \cdot \vec{u}_1 - \left(\frac{\vec{y} \cdot \vec{u}_1}{\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1} \vec{u}_1 + \frac{\vec{y} \cdot \vec{u}_2}{\vec{u}_2 \cdot \vec{u}_2} \vec{u}_2 + \dots + \frac{\vec{y} \cdot \vec{u}_k}{\vec{u}_k \cdot \vec{u}_k} \vec{u}_k \right) \cdot \vec{u}_1 \\&= \vec{y} \cdot \vec{u}_1 - \frac{\vec{y} \cdot \vec{u}_1}{\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1} (\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1) - \frac{\vec{y} \cdot \vec{u}_2}{\vec{u}_2 \cdot \vec{u}_2} \underbrace{(\vec{u}_2 \cdot \vec{u}_1)}_{=0} - \dots - \frac{\vec{y} \cdot \vec{u}_k}{\vec{u}_k \cdot \vec{u}_k} \underbrace{(\vec{u}_k \cdot \vec{u}_1)}_{=0} \\&= \vec{y} \cdot \vec{u}_1 - \vec{y} \cdot \vec{u}_1 = 0\end{aligned}$$

Un calcul analogue nous donne

$$\vec{z} \cdot \vec{u}_j = 0, \text{ pour } j \in \{2, \dots, k\}$$

Il nous reste à montrer que l'écriture est unique.

Supposons qu'en a une autre décomposition;

$$\vec{y} = \hat{y}_1 + \vec{z}_1 \text{ avec } \hat{y}_1 \in W \text{ et } \vec{z}_1 \in W^\perp$$

On a donc

$$\hat{y} + \vec{z} = \hat{y}_1 + \vec{z}_1$$

d'où

$$\underbrace{\hat{y} - \hat{y}_1}_{\in W} = \underbrace{\vec{z}_1 - \vec{z}}_{\in W^\perp}$$

Ainsi, le vecteur $\vec{u} = \hat{y} - \hat{y}_1 = \vec{z}_1 - \vec{z} \in W \cap W^\perp$

d'où l'unicité:

$$\vec{u} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} \hat{y} - \hat{y}_1 = \vec{0} \\ \vec{z}_1 - \vec{z} = \vec{0} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \hat{y} = \hat{y}_1 \\ \vec{z} = \vec{z}_1 \end{cases}$$

