

Proposition. Si S est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$, alors $S^\perp$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

Preuve.

On a $\vec{0} \in S^\perp$ car $\vec{0} \cdot \vec{v} = 0$ pour tout $\vec{v} \in S$

Soient $\vec{x}, \vec{y} \in S^\perp$ et $\lambda \in \mathbb{R}$

A voir : $\vec{x} + \vec{y} \in S^\perp$ et $\lambda \vec{x} \in S^\perp$

Par hypothèse : $\vec{x} \cdot \vec{v} = 0$ pour tout $\vec{v} \in S$

$\vec{y} \cdot \vec{v} = 0$ pour tout $\vec{v} \in S$

d'où : $(\vec{x} + \vec{y}) \cdot \vec{v} = \vec{x} \cdot \vec{v} + \vec{y} \cdot \vec{v} = 0 + 0 = 0 \Rightarrow \vec{x} + \vec{y} \in S^\perp$

$(\lambda \vec{x}) \cdot \vec{v} = \lambda (\vec{x} \cdot \vec{v}) = \lambda 0 = 0 \Rightarrow \lambda \vec{x} \in S^\perp$ ■

Remarque.

La proposition précédente nous dit que même si S n'est pas un sous-espace vectoriel, son complément orthogonal $S^\perp$ en est un !

Proposition. Soit W un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. On a

$$W \cap W^\perp = \{\vec{0}\}$$

Preuve.

Comme W et $W^\perp$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$, ils contiennent le vecteur zéro $\vec{0}$. Par conséquent, $\vec{0} \in W \cap W^\perp$.

Soit $\vec{x} \in W \cap W^\perp$. Comme $\vec{x} \in W$ et $\vec{x} \in W^\perp$, on a $\vec{x} \cdot \vec{x} = 0$, d'où $\vec{x} = \vec{0}$ est le seul élément de $W \cap W^\perp = \{\vec{0}\}$ ■

Proposition. Soient $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k$ k vecteurs quelconques de $\mathbb{R}^n$.

Si $S = \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k\}$ et $W = \text{Vect } S$, alors on a :

$$W^\perp = S^\perp$$

Autrement dit,

$\vec{x} \in W^\perp \Leftrightarrow \vec{x}$ est orthogonal à un système de générateurs de W

Preuve.

On va montrer $W^\perp \subset S^\perp$ et $S^\perp \subset W^\perp$, d'où l'égalité.

$W^\perp \subset S^\perp$: Si $\vec{x} \in W^\perp$, alors $\vec{x} \cdot \vec{w} = 0$ pour tout $\vec{w} \in W$

d'où $\vec{x} \cdot \vec{v}_j = 0$ pour tout $j \in \{1, \dots, k\}$

autrement dit, $\vec{x} \in S^\perp$.

$S^\perp \subset W^\perp$: Si $\vec{x} \in S^\perp$, alors $\vec{x} \cdot \vec{v}_j = 0$ pour tout $j \in \{1, \dots, k\}$

Comme $W = \text{Vect}\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k\}$, tout vecteur $\vec{w} \in W$ s'écrit:

$$\vec{w} = \alpha_1 \vec{v}_1 + \dots + \alpha_k \vec{v}_k$$

On a donc

$$\begin{aligned} \vec{x} \cdot \vec{w} &= \vec{x} \cdot (\alpha_1 \vec{v}_1 + \dots + \alpha_k \vec{v}_k) \\ &= \alpha_1 (\vec{x} \cdot \vec{v}_1) + \dots + \alpha_k (\vec{x} \cdot \vec{v}_k) \\ &= \alpha_1 0 + \dots + \alpha_k 0 = 0 \end{aligned}$$

d'où $\vec{x} \in W^\perp$



Proposition. Soit W un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$. On a

$$W \subset (W^\perp)^\perp$$

Preuve.

Soit $\vec{w} \in W$ un vecteur quelconque.

Comme $\vec{w}$ est orthogonal à tout vecteur de $W^\perp$, nous avons $\vec{w} \in (W^\perp)^\perp$. ■

Remarque. Nous allons montrer plus tard qu'on a en fait égalité:

$$W = (W^\perp)^\perp$$

Théorème. Soit A une matrice de taille $m \times n$. Alors on a:

$$(\text{Lgn}(A))^{\perp} = \text{Nul}(A) \subset \mathbb{R}^n$$

Preuve.

$$\vec{x} \in \text{Nul}(A) \Leftrightarrow A\vec{x} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^m$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\Leftrightarrow \vec{x}$ est orthogonal à chaque ligne de A .

$$\Leftrightarrow \vec{x} \in (\text{Lgn}(A))^{\perp}$$

d'où l'égalité $(\text{Lgn}(A))^{\perp} = \text{Nul}(A)$



Corollaire. Soit A une matrice de taille $m \times n$. Alors on a :

$$(\text{Col}(A))^{\perp} = \text{Nul}(A^T) \subset \mathbb{R}^m$$

Preuve. Le théorème précédent appliqué à la matrice A^T nous donne :

$$(\text{Lgn}(A^T))^{\perp} = \text{Nul}(A^T)$$

Comme $\text{Lgn}(A^T) = \text{Col}(A)$ nous avons le résultat. ■

Méthode pour déterminer $W^\perp$:

Soit $W \subset \mathbb{R}^n$ un sous-espace vectoriel de dimension $0 < k \leq n$.

1. Trouver une base $\{\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_k\}$ de W
2. Construire la matrice A de taille $k \times n$ dont les lignes sont les vecteurs $\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_k$.

Par construction, $\text{Lgn}(A) = W$

Comme $\{\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_k\}$ est libre, on a $\text{rang}(A) = k$.

3. Résoudre le système homogène $A\vec{x} = \vec{0}$ pour trouver

$$W^\perp = \text{Nul}(A)$$

Le théorème du rang nous donne $\dim(W^\perp) = n - k$.

6.2. Ensembles orthogonaux.

Définition. Un ensemble $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_k\}$ de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ est appelé **ensemble orthogonal** si les vecteurs $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_k$ sont orthogonaux deux à deux :

$$\vec{u}_j \cdot \vec{u}_l = 0 \quad \text{pour tout } j, l \in \{1, \dots, k\} \text{ tels que } j \neq l$$

Exemples.

1. L'ensemble $\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix} \right\}$ est orthogonal car $2 \cdot 3 + 3(-2) = 0$.

2. L'ensemble $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$ est orthogonal car

$$1 \cdot 1 + 2(-2) + 3 \cdot 1 = 0, \quad 1 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 = 0 \quad \text{et} \quad 1 \cdot 0 - 2 \cdot 0 + 1 \cdot 0 = 0$$

3. Si $E = \{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$ alors tout sous-ensemble de E est orthogonal.

Théorème. Si $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k\}$ est un ensemble orthogonal de vecteurs non nuls, alors $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k\}$ est un ensemble linéairement indépendant.

Conséquence. Si $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k\}$ est un ensemble orthogonal de vecteurs non nuls, alors $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k\}$ est une base de $\text{Vect}\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k\}$.

Preuve.

$$\text{Soit } \alpha_1 \vec{u}_1 + \alpha_2 \vec{u}_2 + \dots + \alpha_k \vec{u}_k = \vec{0}.$$

$$\text{A voir: } \alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0, \dots, \alpha_k = 0.$$

$$\text{On a } \vec{u}_1 \cdot (\alpha_1 \vec{u}_1 + \alpha_2 \vec{u}_2 + \dots + \alpha_k \vec{u}_k) = \vec{u}_1 \cdot \vec{0} = 0$$

$$\text{d'où } \alpha_1 (\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1) + \alpha_2 (\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2) + \dots + \alpha_k (\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_k) = 0$$

Comme $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k\}$ est un ensemble orthogonal, on a $\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_j = 0$

pour tout $j \in \{2, \dots, k\}$, ce qui implique:

$$\alpha_1 (\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1) = 0$$

Comme $\vec{u}_1$ est non nul, on a $\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1 > 0$ et $\alpha_1 = 0$.

Un calcul analogue nous donne $\alpha_2 = 0, \dots, \alpha_k = 0$



Définition. Soit W un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ de dimension $0 < k \leq n$.

On dit que l'ensemble $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k\}$ est une **base orthogonale** de W

si $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k\}$ est une base de W qui est un ensemble orthogonal.

Exemple.

La base canonique de $\mathbb{R}^n$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}^n$.