
6. Orthogonalité et méthode des moindres carrés

6.1. Produit scalaire, longueur et orthogonalité.

Rappel. Si A est une matrice de taille $m \times n$
et B est une matrice de taille $n \times p$
alors AB est une matrice de taille $m \times p$

Soient maintenant $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$ deux vecteurs quelconques.

Comme $\vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$ est une matrice de taille $n \times 1$

alors que $\vec{u}^T = [u_1 \ u_2 \ \dots \ u_n]$ est une matrice de taille $1 \times n$,

le produit matriciel $\vec{v} \vec{u}^T$ est une matrice de taille $n \times n$

et le produit matriciel $\vec{u}^T \vec{v}$ est une matrice de taille 1×1 ,

autrement dit, un nombre réel.

Définition. Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$. Le nombre réel

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u}^T \vec{v}$$

est appelé **produit scalaire (euclidien)** de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

On le note aussi $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$.

Si $\vec{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$, alors on a:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u}^T \vec{v} = [u_1 \cdots u_n] \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \dots + u_n v_n = \sum_{j=1}^n u_j v_j$$

Remarque. Il est possible de définir d'autres produits scalaires sur $\mathbb{R}^n$ mais le produit scalaire euclidien est le seul qui sera traité dans ce cours.

Théorème. Soient $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$. On a:

1. $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$ (commutativité)

2. $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$ (distributivité)

3. $(\lambda \vec{u}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot (\lambda \vec{v}) = \lambda (\vec{u} \cdot \vec{v})$

4. $\vec{u} \cdot \vec{u} \geq 0$ pour tout $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$

De plus : $\vec{u} \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$

Preuve.

$$1. \text{ On a } \vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u}^T \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \dots + u_n v_n$$

$$\text{et } \vec{v} \cdot \vec{u} = \vec{v}^T \vec{u} = v_1 u_1 + v_2 u_2 + \dots + v_n u_n$$

$$2. \vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) \stackrel{\text{d\u00e9f}}{=} \vec{u}^T (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u}^T \vec{v} + \vec{u}^T \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$$

$$3. (\lambda \vec{u}) \cdot \vec{v} = (\lambda \vec{u})^T \vec{v} = \lambda \vec{u}^T \vec{v} = \lambda (\vec{u} \cdot \vec{v})$$

$$\vec{u} \cdot (\lambda \vec{v}) = \vec{u}^T (\lambda \vec{v}) = \lambda \vec{u}^T \vec{v} = \lambda (\vec{u} \cdot \vec{v})$$

$$4. \vec{u} \cdot \vec{u} = \underbrace{u_1^2}_{\geq 0} + \underbrace{u_2^2}_{\geq 0} + \dots + \underbrace{u_n^2}_{\geq 0} \geq 0$$

Pour avoir une somme nulle, il faut que chaque terme soit nul:

$u_j^2 = 0$ pour tout j . Autrement dit, $u_j = 0$ pour tout j . ■

Conséquence.

$$\vec{u} \cdot (\alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 + \dots + \alpha_p \vec{v}_p) = \alpha_1 \vec{u} \cdot \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{u} \cdot \vec{v}_2 + \dots + \alpha_p \vec{u} \cdot \vec{v}_p$$

Définition. Soit $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$. La norme (euclidienne) ou longueur

du vecteur $\vec{u}$ est le nombre

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}} \geq 0$$

Remarque. Pour des calculs théoriques, on utilise plutôt la formule $\|\vec{u}\|^2 = \vec{u} \cdot \vec{u}$.

Propriété. Si $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors

$$\|\lambda \vec{u}\| = |\lambda| \|\vec{u}\|$$

Définition. On dit qu'un vecteur $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$ est unitaire (ou unité)

si $\|\vec{u}\| = 1$.

Remarque. Si $\vec{u}$ est un vecteur non nul, alors le vecteur

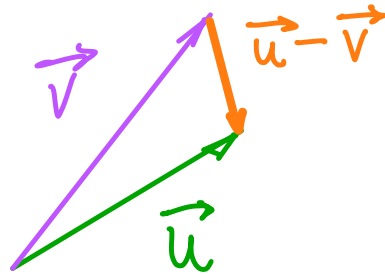
$$\frac{1}{\|\vec{u}\|} \vec{u} = \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}$$

est un vecteur unitaire.

Définition - Soient $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$. On définit la distance entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$ par

$$\text{dist}(\vec{u}, \vec{v}) = \|\vec{u} - \vec{v}\|$$

Geométriquement:



Définition. Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux (entre eux) si

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

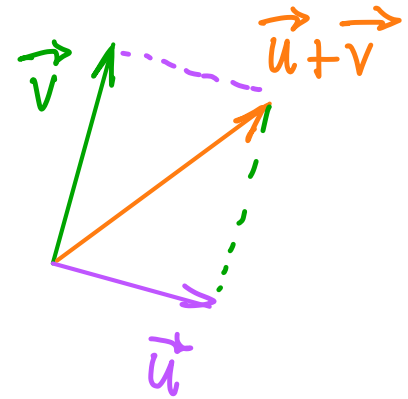
Remarque. Comme $\vec{0} \cdot \vec{v} = 0$ pour tout $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$, le vecteur $\vec{0}$ est orthogonal à tout vecteur de $\mathbb{R}^n$.

Théorème de Pythagore. Soient $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$. On a l'équivalence:

$$\vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont orthogonaux} \Leftrightarrow \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2$$

Preuve.

$$\begin{aligned} \text{On a } \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 &= (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v}) \\ &= \vec{u} \cdot (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{v} \cdot (\vec{u} + \vec{v}) \\ &= \vec{u} \cdot \vec{u} + \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{u} + \vec{v} \cdot \vec{v} \\ &= \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2 \end{aligned}$$



$$\text{d'où: } \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2$$



Définition. Soit S un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$.

Si $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ est orthogonal à tous les vecteurs $\vec{v} \in S$, alors on dit que $\vec{x}$ est orthogonal à S .

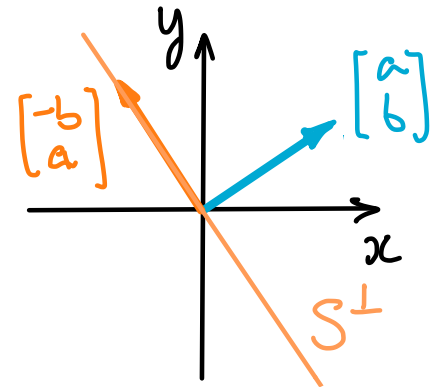
L'ensemble de tous les vecteurs orthogonaux à S est appelé complément orthogonal de S , noté $S^\perp$ (se lit « S orthogonal ») :

$$S^\perp = \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^n : \vec{x} \cdot \vec{v} = 0 \text{ pour tout } \vec{v} \in S \}$$

Exemples.

$n=2$: Si $S = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \right\}$, alors

$$S^\perp = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 : ax + by = 0 \right\}$$



$n=3$: Si $S = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \right\}$, alors

$$S^\perp = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 : ax + by + cz = 0 \right\}$$

