5. Valeurs propres et vecteurs propres

Dans ce chapitre, nous allons considérer seulement des applications linéaires de la forme $T: V \longrightarrow V$.

Dans beaucoup de situations pratiques, il est utile de déterminer les vecteurs $\vec{v} \in V$ pour lesquels $T(\vec{v})$ est un multiple de $\vec{v}$:

$$T(\vec{v}) = \lambda \vec{v} \quad , \text{avec } \lambda \in \mathbb{R}$$

Définition. Soit A une matrice carrée de taille $n \times n$.

On dit qu'un vecteur non-nul $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ est un vecteur propre de A si le vecteur $A\vec{v}$ est un multiple de $\vec{v}$:

$$\boxed{A\vec{v} = \lambda \vec{v}} \qquad \text{pour un certain } \lambda \in \mathbb{R}$$

Le nombre $\lambda \in \mathbb{R}$ est appelé valeur propre de A et on dit que $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ est un vecteur propre de A associé à la valeur propre $\lambda \in \mathbb{R}$.

Exemple.

Le vecteur $\vec{v}=\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$ est un vecteur propre de la matrice $A=\begin{bmatrix}3 & 6\\-1 & -4\end{bmatrix}$ associé à la valeur propre $\lambda=-3$. En effet,

$$A\vec{v}=\begin{bmatrix}3 & 6\\-1 & -4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3-6\\-1+4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3\\3\end{bmatrix}=-3\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$$

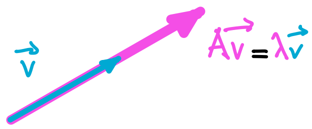
$$\Rightarrow A\vec{v}=-3\vec{v}$$

Interprétation géométrique dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$.

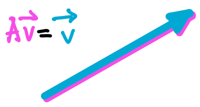
Soit A une matrice carrée (2×2 ou 3×3) et $\lambda\in\mathbb{R}$ une valeur propre de A.

Soit $\vec{v}\neq\vec{0}$ un vecteur propre de A associé à λ.

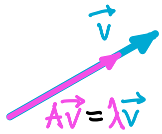
- Si $\lambda>1$ alors A dilate $\vec{v}$:



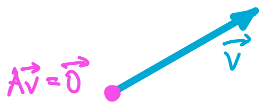
- Si $\lambda=1$ alors A fixe $\vec{v}$:



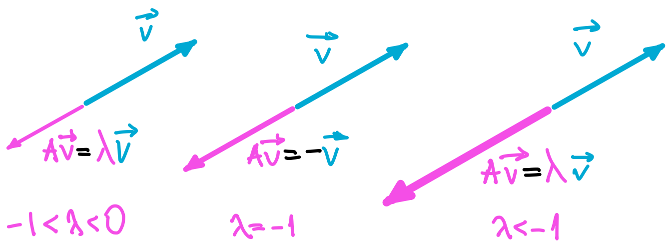
- Si $0<\lambda<1$ alors A contracte $\vec{v}$:



- Si $\lambda=0$ alors A annule $\vec{v}$:



- Si $\lambda<0$ alors A inverse la direction de $\vec{v}$:



Calcul des valeurs propres.

On a $A\vec{v} = \lambda\vec{v} \iff \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$

$$\iff \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\iff \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} - \lambda \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}}_{= I_n} \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\iff \left(\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\iff \begin{bmatrix} a_{11}-\lambda & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{A\vec{v} = \lambda\vec{v} \iff (A-\lambda I_n)\vec{v} = \vec{0}}$$

Conséquence.

$\left.\begin{array}{l} \vec{v} \neq \vec{0} \text{ vecteur propre de } A \\ \text{associé à la valeur propre } \lambda \end{array}\right\}$

$\iff \vec{v} \neq \vec{0}$ solution de $(A-\lambda I_n)\vec{v} = \vec{0}$

$\iff \vec{v} \neq \vec{0}$ appartient à $\mathrm{Nul}(A-\lambda I_n)$

$\iff (A-\lambda I_n)\vec{v} = \vec{0}$

possède une infinité de solutions

$\iff \dim(\mathrm{Nul}(A-\lambda I_n)) > 0$

$\iff n - \mathrm{rang}(A-\lambda I_n) > 0$

$\iff \mathrm{rang}(A-\lambda I_n) < n$

$\iff \det(A-\lambda I_n) = 0$

Définition. Soit A une matrice carrée de taille $n \times n$.

Le polynôme caractéristique de A, noté $P_c(\lambda)$, est défini par

$$\boxed{P_c(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)}$$

Il s'agit d'un polynôme de degré n dans la variable λ.

Théorème. Nous avons l'équivalence

$$\lambda \text{ valeur propre de } A \iff P_c(\lambda) = 0$$
$$\iff \lambda \text{ est une racine de } P_c$$

Exemples.

1. Trouver les valeurs propres de $A = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ -1 & -4 \end{bmatrix}$

polynôme caractéristique:

$$P_c(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det\begin{bmatrix} 3-\lambda & 6 \\ -1 & -4-\lambda \end{bmatrix} = (3-\lambda)(-4-\lambda) - 6(-1)$$
$$= -12 - 3\lambda + 4\lambda + \lambda^2 + 6 = \lambda^2 + \lambda - 6 = (\lambda + 3)(\lambda - 2)$$

valeurs propres: $\boxed{\lambda_1 = -3}$ et $\boxed{\lambda_2 = 2}$

2. Trouver les valeurs propres de $B=\begin{bmatrix}5 & -1\\ 3 & 1\end{bmatrix}$

polynôme caractéristique:

$$P_c(\lambda)=\det(B-\lambda I)=\det\begin{bmatrix}5-\lambda & -1\\ 3 & 1-\lambda\end{bmatrix}=(5-\lambda)(1-\lambda)-3(-1)$$

$$=5-5\lambda-\lambda+\lambda^2+3=\lambda^2-6\lambda+8=(\lambda-2)(\lambda-4)$$

valeurs propres: $\boxed{\lambda_1=2}$ et $\boxed{\lambda_2=4}$

3. Trouver les valeurs propres de $C=\begin{bmatrix}-2 & -1\\ 5 & 2\end{bmatrix}$

polynôme caractéristique:

$$P_c(\lambda)=\det(C-\lambda I)=\det\begin{bmatrix}-2-\lambda & -1\\ 5 & 2-\lambda\end{bmatrix}=(-2-\lambda)(2-\lambda)-5(-1)$$

$$=\lambda^2-4+5=\lambda^2+1$$

$\Rightarrow$ C n'a pas de valeurs propres dans $\mathbb{R}$.

Par contre, comme $\lambda^2+1=(\lambda+i)(\lambda-i)$, alors

$\boxed{\lambda_1=i}$ et $\boxed{\lambda_2=-i}$ sont les valeurs propres de C dans $\mathbb{C}$.

4. Trouver les valeurs propres de $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -2 \\ -5 & 3 & 2 \\ -2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$

polynôme caractéristique :

$$p_c(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} 4-\lambda & 2 & -2 \\ -5 & 3-\lambda & 2 \\ -2 & 4 & 1-\lambda \end{bmatrix} \underset{C_3 \to C_3 + C_2}{=} \det \begin{bmatrix} 4-\lambda & 2 & 0 \\ -5 & 3-\lambda & 5-\lambda \\ -2 & 4 & 5-\lambda \end{bmatrix}$$

$$\underset{L_2 \to L_2 - L_3}{=} \det \begin{bmatrix} 4-\lambda & 2 & 0 \\ -3 & -1-\lambda & 0 \\ -2 & 4 & 5-\lambda \end{bmatrix} \underset{\text{dév. } C_3}{=} (5-\lambda) \det \begin{bmatrix} 4-\lambda & 2 \\ -3 & -1-\lambda \end{bmatrix}$$

$$= (5-\lambda)\left[(4-\lambda)(-1-\lambda) - 2(-3)\right] = (5-\lambda)(\lambda^2 - 3\lambda - 4 + 6)$$

$$= (5-\lambda)(\lambda^2 - 3\lambda + 2) = (5-\lambda)(\lambda-1)(\lambda-2)$$

valeurs propres : $\boxed{\lambda_1 = 1}$, $\boxed{\lambda_2 = 2}$, $\boxed{\lambda_3 = 5}$

Remarques.

- Si $\det(A) = 0$, alors $\lambda = 0$ est une racine de $p_c(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$.

  Ainsi, nous avons l'équivalence :

  A n'est pas inversible $\iff$ $\lambda = 0$ est une valeur propre de A

- Si A est triangulaire, alors $A - \lambda I_n$ est aussi triangulaire :

$$A - \lambda I_n = \begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} - \lambda \end{bmatrix}$$

  d'où : $p_c(\lambda) = (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) \cdots (a_{nn} - \lambda)$

  Dans ce cas, les valeurs propres de A se trouvent sur la diagonale.

Calcul des vecteurs propres.

Rappel.

$\vec{v} \neq \vec{0}$ vecteur propre de A associé à la valeur propre λ $\iff$ $\vec{v} \neq \vec{0}$ solution de $(A-\lambda I)\vec{v} = \vec{0}$

$\iff$ $\vec{v} \neq \vec{0}$ appartient à $\mathrm{Nul}(A-\lambda I_n)$

Définition. Soit A une matrice carrée de taille $n \times n$.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ une valeur propre de A. L'espace propre de A associé à λ noté E_λ, est défini par

$$\boxed{E_\lambda = \mathrm{Nul}(A - \lambda I)}$$

Ainsi, par définition, l'espace propre de A associé à λ contient tous les vecteurs propres de A associés à λ ainsi que le vecteur zéro.

Remarques.

- Par construction, $\dim(E_\lambda) > 0$ (car $\mathrm{rang}(A-\lambda I_n) < n$).
  Par conséquent, si lors d'un calcul on trouve $\dim(E_\lambda) = 0$, cela veut dire que λ n'est pas une valeur propre de A !
- Soit m_λ la multiplicité de λ en tant que racine de $p_c(\lambda)$.
  [p.ex. si $p_c(\lambda) = (\lambda-3)^2(\lambda-5)(\lambda+4)^3$ alors $m_3 = 2$, $m_5 = 1$ et $m_{-4} = 3$]
  On peut montrer que $\dim(E_\lambda) \leq m_\lambda$, d'où

$$\boxed{1 \leq \dim(E_\lambda) \leq m_\lambda}$$

  En particulier, si λ est une racine simple de $p_c(\lambda)$ nous avons $m_\lambda = 1$ et $\dim(E_\lambda) = 1$.

- Le nombre $\dim(E_\lambda)$ est parfois appelé multiplicité géométrique de la valeur propre λ de A.
- Le nombre m_λ est parfois appelé multiplicité algébrique de la valeur propre λ de A.

Exemples.

1. Trouver les espaces propres de $A=\begin{bmatrix}3 & 6\\ -1 & -4\end{bmatrix}$

polynôme caractéristique: $P_c(\lambda)=\det\begin{bmatrix}3-\lambda & 6\\ -1 & -4-\lambda\end{bmatrix}=\ldots=(\lambda+3)(\lambda-2)$

valeurs propres: $\boxed{\lambda_1=-3}$ et $\boxed{\lambda_2=2}$

Comme $m_{-3}=1$ et $m_2=1$, on s'attend à trouver $\dim(E_{-3})=1$ et $\dim(E_2)=1$

$\lambda_1=-3$: $A-(-3)I=\begin{bmatrix}3-(-3) & 6\\ -1 & -4-(-3)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6 & 6\\ -1 & -1\end{bmatrix}\sim\begin{array}{c}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}\\ \uparrow\ \ \uparrow\\ x\ \ \ y\end{array}$

$\operatorname{rang}(A+3I)=1 \Rightarrow \dim(E_{-3})=2-1=1$

système associé: $x+y=0 \Leftrightarrow x=-y \Leftrightarrow \begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=t\begin{bmatrix}-1\\ 1\end{bmatrix}$, avec $t\in\mathbb{R}$

$\Rightarrow \boxed{E_{-3}=\operatorname{Vect}\{(-1,1)\}}$

Vérification: $\begin{bmatrix}3&6\\-1&-4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3+6\\1-4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\-3\end{bmatrix}=-3\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}$

$\lambda_2=2$: $A-2I=\begin{bmatrix}3-2&6\\-1&-4-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&6\\-1&-6\end{bmatrix}\sim\begin{array}{cc}\begin{bmatrix}1&6\\0&0\end{bmatrix}\\ \begin{array}{cc}\uparrow&\uparrow\\x&y\end{array}\end{array}$

$\text{rang}(A-2I)=1 \Rightarrow \dim(E_2)=2-1=1$

système associé: $x+6y=0 \Leftrightarrow x=-6y \Leftrightarrow \begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=t\begin{bmatrix}-6\\1\end{bmatrix}$, avec $t\in\mathbb{R}$

$\Rightarrow$ $\boxed{E_2=\text{Vect}\{(-6,1)\}}$

Vérification: $\begin{bmatrix}3&6\\-1&-4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-6\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-18+6\\6-4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-12\\2\end{bmatrix}=2\begin{bmatrix}-6\\1\end{bmatrix}$

2. Trouver les espaces propres de $B=\begin{bmatrix}5&-1\\3&1\end{bmatrix}$

polynôme caractéristique: $P_c(\lambda)=\det\begin{bmatrix}5-\lambda&-1\\3&1-\lambda\end{bmatrix}=\ldots=(\lambda-2)(\lambda-4)$

valeurs propres: $\boxed{\lambda_1=2}$ et $\boxed{\lambda_2=4}$

Comme $m_2=1$ et $m_4=1$, on s'attend à trouver

$$\dim(E_2)=1 \quad \text{et} \quad \dim(E_4)=1$$

$\lambda_1=2$: $B-2I=\begin{bmatrix}5-2&-1\\3&1-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&-1\\3&-1\end{bmatrix}\sim\begin{array}{cc}\begin{bmatrix}3&-1\\0&0\end{bmatrix}\\ \begin{array}{cc}\uparrow&\uparrow\\x&y\end{array}\end{array}$

$\text{rang}(B-2I)=1 \Rightarrow \dim(E_2)=2-1=1$

système associé: $3x-y=0 \Leftrightarrow y=3x \Leftrightarrow \begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=t\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}$, avec $t\in\mathbb{R}$

$\Rightarrow$ $\boxed{E_2=\text{Vect}\{(1,3)\}}$

Vérification: $\begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5-3 \\ 3+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$

$\lambda_2 = 4$: $B - 4I = \begin{bmatrix} 5-4 & -1 \\ 3 & 1-4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\begin{array}{cc} \uparrow & \uparrow \\ x & y \end{array}$

$\text{rang}(B-4I) = 1 \Rightarrow \dim(E_4) = 2 - 1 = 1$

système associé: $x - y = 0 \Leftrightarrow x = y \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, avec $t \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \boxed{E_4 = \text{Vect}\{(1,1)\}}$

Vérification: $\begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5-1 \\ 3+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix} = 4\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

3. Trouver les espaces propres de $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -2 \\ -5 & 3 & 2 \\ -2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$

polynôme caractéristique:

$$P_c(\lambda) = \det\begin{bmatrix} 4-\lambda & 2 & -2 \\ -5 & 3-\lambda & 2 \\ -2 & 4 & 1-\lambda \end{bmatrix} = \ldots = (5-\lambda)(\lambda-1)(\lambda-2)$$

valeurs propres: $\boxed{\lambda_1 = 1}$, $\boxed{\lambda_2 = 2}$, $\boxed{\lambda_3 = 5}$

Comme $m_1 = 1$, $m_2 = 1$ et $m_5 = 1$ on s'attend à trouver

$\dim(E_1) = 1$, $\dim(E_2) = 1$ et $\dim(E_5) = 1$

$\lambda_1 = 1$:

$$A - 1I = \begin{bmatrix} 4-1 & 2 & -2 \\ -5 & 3-1 & 2 \\ -2 & 4 & 1-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -5 & 2 & 2 \\ -2 & 4 & 0 \end{bmatrix} \underset{L_1 \leftrightarrow -\frac{1}{2}L_3}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -5 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & -2 \end{bmatrix} \underset{\substack{L_2 \to L_2 + 5L_1 \\ L_3 \to L_3 - 3L_1}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & -8 & 2 \\ 0 & 8 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\underset{L_3 \to L_3 + L_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & -8 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \underset{L_2 \to -\frac{1}{8}L_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1/4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \underset{L_1 \to L_1 + 2L_2}{\sim} \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & -1/4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ x & y & z \end{array} \end{array}$$

$\text{rang}(A - I) = 2 \Rightarrow \dim(E_1) = 3 - 2 = 1$

système associé :

$$\begin{cases} x \quad -\frac{1}{2}z = 0 \\ \quad y - \frac{1}{4}z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{1}{2}z \\ y = \frac{1}{4}z \end{cases} \iff \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}, \text{ avec } t \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \boxed{E_1 = \text{Vect}\{(2,1,4)\}}$$

Vérification : $\begin{bmatrix} 4 & 2 & -2 \\ -5 & 3 & 2 \\ -2 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8+2-8 \\ -10+3+8 \\ -4+4+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} = 1 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$

Remarque. Il est possible ici de faire des opérations élémentaires sur les lignes de sorte à éviter les fractions :

$$A - 1I \sim \cdots \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & -8 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \underset{L_2 \to \frac{1}{2}L_2}{\sim} \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ x & y & z \end{array} \end{array}$$

système associé :

$$\begin{cases} x - 2y \quad = 0 \\ \quad -4y + z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 2y \\ z = 4y \end{cases} \iff \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}, \text{ avec } t \in \mathbb{R}$$

et l'on retrouve la même solution générale.

$\lambda_2 = 2$:

$$A - 2I = \begin{bmatrix} 4-2 & 2 & -2 \\ -5 & 3-2 & 2 \\ -2 & 4 & 1-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ -5 & 1 & 2 \\ -2 & 4 & -1 \end{bmatrix} \underset{L_1 \to \frac{1}{2}L_1}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -5 & 1 & 2 \\ -2 & 4 & -1 \end{bmatrix} \underset{\substack{L_2 \to L_2 + 5L_1 \\ L_3 \to L_3 + 2L_1}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 6 & -3 \\ 0 & 6 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\underset{L_3 \to L_3 - L_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 6 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \underset{L_2 \to \frac{1}{6}L_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \underset{L_1 \to L_1 - L_2}{\sim} \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{matrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ x & y & z \end{matrix} \end{array}$$

$\text{rang}(A - 2I) = 2 \Rightarrow \dim(E_2) = 3 - 2 = 1$

système associé :

$$\begin{cases} x \quad - \frac{1}{2}z = 0 \\ \quad y - \frac{1}{2}z = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2}z \\ y = \frac{1}{2}z \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \text{ avec } t \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \boxed{E_2 = \text{Vect}\{(1,1,2)\}}$$

Vérification : $\begin{bmatrix} 4 & 2 & -2 \\ -5 & 3 & 2 \\ -2 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4+2-4 \\ -5+3+4 \\ -2+4+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

$\lambda_3 = 5$:

$$A - 5I = \begin{bmatrix} 4-5 & 2 & -2 \\ -5 & 3-5 & 2 \\ -2 & 4 & 1-5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -2 \\ -5 & -2 & 2 \\ -2 & 4 & -4 \end{bmatrix} \underset{L_1 \to -L_1}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -5 & -2 & 2 \\ -2 & 4 & -4 \end{bmatrix} \underset{\substack{L_2 \to L_2 + 5L_1 \\ L_3 \to L_3 + 2L_1}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & -12 & 12 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\underset{L_2 \to -\frac{1}{12}L_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \underset{L_1 \to L_1 + 2L_2}{\sim} \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{matrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ x & y & z \end{matrix} \end{array}$$

$\text{rang}(A - 5I) = 2 \Rightarrow \dim(E_5) = 3 - 2 = 1$

système associé :

$$\begin{cases} x \qquad\quad = 0 \\ \quad y - z = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = z \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \text{ avec } t \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \boxed{E_5 = \text{Vect}\{(0,1,1)\}}$$

Vérification : $\begin{bmatrix} 4 & 2 & -2 \\ -5 & 3 & 2 \\ -2 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0+2-2 \\ 0+3+2 \\ 0+4+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 5 \end{bmatrix} = 5 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

4. Trouver les espaces propres de $A=\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -3 & -2 & 3 \\ -2 & -2 & 3 \end{bmatrix}$

polynôme caractéristique :

$$P_c(\lambda)=\det\begin{bmatrix} -\lambda & -1 & 1 \\ -3 & -2-\lambda & 3 \\ -2 & -2 & 3-\lambda \end{bmatrix} \underset{\substack{C_1\to C_1-C_2 \\ C_3\to C_3+C_2}}{=} \det\begin{bmatrix} 1-\lambda & -1 & 0 \\ -1+\lambda & -2-\lambda & 1-\lambda \\ 0 & -2 & 1-\lambda \end{bmatrix} \underset{L_2\to L_2+L_1}{=} \det\begin{bmatrix} 1-\lambda & -1 & 0 \\ 0 & -3-\lambda & 1-\lambda \\ 0 & -2 & 1-\lambda \end{bmatrix}$$

$$\underset{\text{dév. } C_1}{=} (1-\lambda)\det\begin{bmatrix} -3-\lambda & 1-\lambda \\ -2 & 1-\lambda \end{bmatrix} \underset{L_1\to L_1-L_2}{=} (1-\lambda)\det\begin{bmatrix} -1-\lambda & 0 \\ -2 & 1-\lambda \end{bmatrix} = (1-\lambda)(-1-\lambda)(1-\lambda)$$

$$\Rightarrow P_c(\lambda) = -(\lambda-1)^2(\lambda+1)$$

valeurs propres :

$\boxed{\lambda_1 = 1}$ (multiplicité $m_1 = 2$) $\Rightarrow 1 \leqslant \dim(E_1) \leqslant 2$

$\boxed{\lambda_2 = -1}$ (multiplicité $m_{-1} = 1$) $\Rightarrow \dim(E_{-1}) = 1$

Espaces propres :

$\lambda_1 = 1$:

$$A-1I = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -3 & -2-1 & 3 \\ -2 & -2 & 3-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{matrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ x & y & z \end{matrix} \end{array}$$

$\operatorname{rang}(A-1I) = 1 \Rightarrow \dim(E_1) = 3 - 1 = 2$

système associé :

$$x+y-z=0 \iff x=-y+z \iff \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = s\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \text{ avec } s,t\in\mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \boxed{E_1 = \operatorname{Vect}\{(-1,1,0),(1,0,1)\}}$$

Vérification :

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -3 & -2 & 3 \\ -2 & -2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0-1+0 \\ 3-2+0 \\ 2-2+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 1\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -3 & -2 & 3 \\ -2 & -2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0+0+1 \\ -3+0+3 \\ -2+0+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 1\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\lambda_2 = -1$:

$$A-(-1)I = \begin{bmatrix} -(-1) & -1 & 1 \\ -3 & -2-(-1) & 3 \\ -2 & -2 & 3-(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -3 & -1 & 3 \\ -2 & -2 & 4 \end{bmatrix} \underset{\substack{L_2 \to L_2+3L_1 \\ L_3 \to L_3+2L_1}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & 6 \\ 0 & -4 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\underset{L_3 \to L_3 - L_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \underset{L_2 \to -\frac{1}{4}L_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -3/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \underset{L_1 \to L_1 + L_2}{\sim} \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & -3/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ x & y & z \end{array} \end{array}$$

$\text{rang}(A-(-1)I) = 2 \Rightarrow \dim(E_{-1}) = 3-2 = 1$

système associé: $\begin{cases} x - \frac{1}{2}z = 0 \\ y - \frac{3}{2}z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2}z \\ y = \frac{3}{2}z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$, avec $t \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \boxed{E_{-1} = \text{Vect}\{(1,3,2)\}}$

Vérification: $\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -3 & -2 & 3 \\ -2 & -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0-3+2 \\ -3-6+6 \\ -2-6+6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ -2 \end{bmatrix} = (-1) \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$

En résumé, la matrice $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -3 & -2 & 3 \\ -2 & -2 & 3 \end{bmatrix}$ a deux valeurs propres:

$\boxed{\lambda_1 = 1}$ (multiplicité $m_1 = 2$)

$\boxed{\lambda_2 = -1}$ (multiplicité $m_{-1} = 1$)

espaces propres associées: $\boxed{E_1 = \text{Vect}\{(-1,1,0),(1,0,1)\}}$ avec $\dim(E_1) = 2$

$\boxed{E_{-1} = \text{Vect}\{(1,3,2)\}}$ avec $\dim(E_{-1}) = 1$

Affirmation. Les vecteurs $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ et $\vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ sont linéairement indépendants (car $\det \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = -\det \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = 2 \neq 0$ ou ...)

Par conséquent, $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

Comme $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ et $\vec{v}_3$ sont des vecteurs propres de A on a :

$$A\vec{v}_1 = 1\vec{v}_1 = 1\vec{v}_1 + 0\vec{v}_2 + 0\vec{v}_3$$

$$A\vec{v}_2 = 1\vec{v}_2 = 0\vec{v}_1 + 1\vec{v}_2 + 0\vec{v}_3$$

$$A\vec{v}_3 = (-1)\vec{v}_3 = 0\vec{v}_1 + 0\vec{v}_2 + (-1)\vec{v}_3$$

Par conséquent, la matrice associée à l'application linéaire $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\vec{v} \mapsto A\vec{v}$ par rapport à la base $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ est :

$$A_T^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Il s'agit d'une matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont les valeurs propres de A.

Rappel.

Soient A et B deux matrices carrées de taille $n \times n$.

On dit que les matrices A et B sont semblables s'il existe une matrice inversible P telle que

$$\boxed{B = PAP^{-1}}$$

Exemple important.

Les matrices $A_T^{\mathcal{C}}$ et $A_T^{\mathcal{B}}$ sont semblables car on a

$$A_T^{\mathcal{C}} = P\,A_T^{\mathcal{B}}\,P^{-1} \quad \text{avec } P = P^{\mathcal{C}\mathcal{B}}$$

Théorème.

Si A et B sont deux matrices semblables, alors elles possèdent le même polynôme caractéristique.

Preuve. A voir : $\det(A-\lambda I) \overset{?}{=} \det(B-\lambda I)$

Par hypothèse : $B = PAP^{-1}$

Nous avons :
$$\begin{aligned} B-\lambda I &= PAP^{-1} - \lambda I \\ &= PAP^{-1} - \lambda PIP^{-1} \\ &= P(AP^{-1} - \lambda IP^{-1}) \\ &= P(A-\lambda I)P^{-1} \end{aligned}$$

d'où :
$$\begin{aligned} \det(B-\lambda I) &= \det(P(A-\lambda I)P^{-1}) \\ &= \det((A-\lambda I)P^{-1}P) \qquad \left[\text{Rappel: } \det(CD) = \det(DC)\right] \\ &= \det(A-\lambda I) \end{aligned}$$

Autre possibilité :
$$\begin{aligned} \det(B-\lambda I) &= \det(P(A-\lambda I)P^{-1}) = \det(P)\det(A-\lambda I)\det(P^{-1}) \\ &= \det(A-\lambda I)\underbrace{\det(P)\det(P^{-1})}_{=\det(PP^{-1}) = \det(I) = 1} \\ &= \det(A-\lambda I) \end{aligned}$$
$\blacksquare$

Conséquence.

Si A et B sont deux matrices semblables, elles ont les mêmes valeurs propres avec la même multiplicité.

Théorème.

Soit A une matrice de taille $n \times n$.

Soient $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \dots, \vec{v_k}$ des vecteurs propres de A associés à des valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ distinctes.

Alors ces vecteurs sont linéairement indépendants.

Preuve. On suppose que $\{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \dots, \vec{v_k}\}$ est lié.

Par conséquent, l'un des vecteurs peut s'écrire comme une combinaison linéaire des autres.

Soit $p<k$ le plus grand indice tel que $\{\vec{v_1}, \dots, \vec{v_p}\}$ est linéairement indépendant.

Ainsi, $\vec{v}_{p+1}$ peut s'écrire comme combinaison linéaire de $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \dots, \vec{v_p}$:

$$\vec{v}_{p+1} = \alpha_1 \vec{v_1} + \alpha_2 \vec{v_2} + \dots + \alpha_p \vec{v_p}$$

En multipliant à gauche par A on obtient :

$$A\vec{v}_{p+1} = A(\alpha_1 \vec{v_1} + \alpha_2 \vec{v_2} + \dots + \alpha_p \vec{v_p})$$

$$= \alpha_1 A\vec{v_1} + \alpha_2 A\vec{v_2} + \dots + \alpha_p A\vec{v_p}$$

Comme $\vec{v_1}, \dots, \vec{v}_{p+1}$ sont des vecteurs propres de A on a :

$$\lambda_{p+1}\vec{v}_{p+1} = \alpha_1 \lambda_1 \vec{v_1} + \alpha_2 \lambda_2 \vec{v_2} + \dots + \alpha_p \lambda_p \vec{v_p}$$

Comme $\vec{v}_{p+1}$ s'écrit comme combinaison linéaire de $\vec{v_1}, \dots, \vec{v_p}$ on a :

$$\lambda_{p+1}(\alpha_1 \vec{v_1} + \alpha_2 \vec{v_2} + \dots + \alpha_p \vec{v_p}) = \alpha_1 \lambda_1 \vec{v_1} + \alpha_2 \lambda_2 \vec{v_2} + \dots + \alpha_p \lambda_p \vec{v_p}$$

ou encore

$$\alpha_1(\lambda_{p+1}-\lambda_1)\vec{v_1}+\alpha_2(\lambda_{p+1}-\lambda_2)\vec{v_2}+\ldots+\alpha_p(\lambda_{p+1}-\lambda_p)\vec{v_p}=\vec{0}$$

Comme $\vec{v_1},\ldots,\vec{v_p}$ sont linéairement indépendants on a

$$\alpha_1(\lambda_{p+1}-\lambda_1)=0,\ \alpha_2(\lambda_{p+1}-\lambda_2)=0,\ldots,\ \alpha_p(\lambda_{p+1}-\lambda_p)=0$$

Comme par hypothèse les valeurs propres sont distinctes, on trouve

$$\alpha_1=0,\ \alpha_2=0,\ldots,\ \alpha_p=0$$

ce qui implique $\vec{v}_{p+1}=\vec{0}$, en contradiction avec le fait que $\vec{v}_{p+1}$ est un vecteur propre de A. Par conséquent, $\{\vec{v_1},\ldots,\vec{v_k}\}$ est linéairement indépendant. ■

Définition. Soit A une matrice carrée de taille $n\times n$.
On dit que A est *diagonalisable* si A est semblable à une matrice diagonale D :

$$\boxed{A=PDP^{-1} \iff AP=PD}$$

Exemple.
La matrice $A=\begin{bmatrix}0&-1&1\\-3&-2&3\\-2&-2&3\end{bmatrix}$ est diagonalisable.

En effet, nous avons vu que A est semblable à $D=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{bmatrix}$.

Soient $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ les colonnes de P :

$$P = \begin{bmatrix} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \cdots & \vec{v}_n \end{bmatrix}$$

On a $AP = \begin{bmatrix} A\vec{v}_1 & A\vec{v}_2 & \cdots & A\vec{v}_n \end{bmatrix}$

et $PD = \begin{bmatrix} \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \cdots & \vec{v}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \ddots \; \lambda_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1\vec{v}_1 & \lambda_2\vec{v}_2 & \cdots & \lambda_n\vec{v}_n \end{bmatrix}$

Par conséquent,

$$AP = PD \iff A\vec{v}_j = \lambda_j\vec{v}_j \quad \text{, pour } j = 1, \dots, n.$$

Autrement dit, les colonnes de P sont des vecteurs propres de A et les coefficients diagonaux de D, les valeurs propres associées !

Exemples.

1. Soit $A = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ -1 & -4 \end{bmatrix}$.

Nous avons vu que $\lambda_1 = -3$ et $\lambda_2 = 2$ sont les valeurs propres de A et $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ et $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} -6 \\ 1 \end{bmatrix}$ sont des vecteurs propres de A associés aux valeurs propres λ_1 et λ_2 respectivement.

Dans ce cas, nous pouvons construire une matrice diagonale $D = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ formée des valeurs propres de A et une matrice inversible $P = \begin{bmatrix} -1 & -6 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ formée de vecteurs propres associés.

Le calcul nous donne $P^{-1} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 1 & 6 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$.

La matrice A est diagonalisable car elle peut s'écrire $A = PDP^{-1}$!

En effet,

$$PDP^{-1}=\underbrace{\begin{bmatrix}-1 & -6\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-3 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}}_{=\begin{bmatrix}3 & -12\\ -3 & 2\end{bmatrix}}\frac{1}{5}\begin{bmatrix}1 & 6\\ -1 & -1\end{bmatrix}=\frac{1}{5}\begin{bmatrix}3 & -12\\ -3 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 6\\ -1 & -1\end{bmatrix}=\frac{1}{5}\begin{bmatrix}15 & 30\\ -5 & -20\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow PDP^{-1}=\begin{bmatrix}3 & 6\\ -1 & -4\end{bmatrix}=A$$

Alternativement, nous pouvons prendre $P=\begin{bmatrix}-6 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$, $D=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & -3\end{bmatrix}$ et $P^{-1}=\frac{1}{5}\begin{bmatrix}-1 & -1\\ 1 & 6\end{bmatrix}$.

En effet,

$$PDP^{-1}=\underbrace{\begin{bmatrix}-6 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & -3\end{bmatrix}}_{=\begin{bmatrix}-12 & 3\\ 2 & -3\end{bmatrix}}\frac{1}{5}\begin{bmatrix}-1 & -1\\ 1 & 6\end{bmatrix}=\frac{1}{5}\begin{bmatrix}-12 & 3\\ 2 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & -1\\ 1 & 6\end{bmatrix}=\frac{1}{5}\begin{bmatrix}15 & 30\\ -5 & -20\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow PDP^{-1}=\begin{bmatrix}3 & 6\\ -1 & -4\end{bmatrix}=A$$

2. Soit $A=\begin{bmatrix}4 & 2 & -2\\ -5 & 3 & 2\\ -2 & 4 & 1\end{bmatrix}$

Nous avons vu que $\lambda_1=1$, $\lambda_2=2$ et $\lambda_3=5$ sont les valeurs propres de A et $\vec{v}_1=\begin{bmatrix}2\\1\\4\end{bmatrix}$, $\vec{v}_2=\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}$ et $\vec{v}_3=\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}$ sont des vecteurs propres de A associés à λ_1, λ_2 et λ_3 respectivement. Comme elles sont distinctes, les vecteurs $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ et $\vec{v}_3$ sont linéairement indépendants. Par conséquent, la matrice $P=\begin{bmatrix}2 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1\\ 4 & 2 & 1\end{bmatrix}$ est inversible et nous pouvons écrire

$$A=PDP^{-1}, \qquad \text{avec } D=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 5\end{bmatrix}$$

La matrice A est donc diagonalisable.

Comme par hypothèse $P = \begin{bmatrix} \vec{v_1} & \vec{v_2} & \cdots & \vec{v_n} \end{bmatrix}$ est inversible, les colonnes de P sont linéairement indépendantes et forment donc une base de $\mathbb{R}^n$.
Si λ est une valeur propre de A de multiplicité $m \geq 1$, alors il y a m coefficients diagonaux de D égaux à λ et il y a m colonnes de P associées. Il y a donc m vecteurs linéairement indépendants qui sont des vecteurs propres de A associés à λ, d'où $\dim(E_\lambda) = m$.

Théorème. Soit A une matrice de taille $n \times n$. On a l'équivalence:

$$A \text{ est diagonalisable} \iff \begin{cases} \text{il existe des nombres } \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R} \text{ tels que} \\ P_C(\lambda) = (-1)^n (\lambda - \lambda_1)^{m_1} (\lambda - \lambda_2)^{m_2} \cdots (\lambda - \lambda_k)^{m_k} \\ \text{avec } m_1 + \ldots + m_k = n \\ \text{et } \dim(E_{\lambda_j}) = m_j, \text{ pour } j = 1, \ldots, k \end{cases}$$

Corollaire. Soit A une matrice de taille $n \times n$.
Si A possède n valeurs propres distinctes alors A est diagonalisable

Preuve. Soient $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ les n valeurs propres distinctes de A.
Par construction, elles sont toutes de multiplicité 1, d'où
$P_C(\lambda) = (-1)^n (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \cdots (\lambda - \lambda_n)$ et $\dim(E_{\lambda_j}) = 1$ pour $j = 1, \ldots, n$. ■

Exemples.

1. $A=\begin{bmatrix}0&4\\4&0\end{bmatrix}$ est diagonalisable.

   En effet, comme $P_c(\lambda)=\det\begin{bmatrix}-\lambda&4\\4&-\lambda\end{bmatrix}=\lambda^2-4^2=(\lambda-4)(\lambda+4)$, la matrice A possède deux valeurs propres distinctes : $\lambda_1=4$ et $\lambda_2=-4$.

2. $B=\begin{bmatrix}0&5\\0&0\end{bmatrix}$ n'est pas diagonalisable.

   En effet, comme $P_c(\lambda)=\det\begin{bmatrix}-\lambda&5\\0&-\lambda\end{bmatrix}=\lambda^2$, la matrice B possède une valeur propre $(\lambda=0)$ de multiplicité $m=2$, mais l'espace propre associé E_0 ne satisfait pas $\dim(E_0)=2$ car $\text{rang}(B-0I)=\text{rang}(B)=1$ et $\dim(E_0)=2-1=1<2$.

Méthode de diagonalisation.

Pour déterminer si une matrice A de taille $n\times n$ est diagonalisable :

- Calculer les valeurs propres de A : $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_k\in\mathbb{R}$

  et leurs multiplicités : $m_1,m_2,\dots,m_k$

- Si $m_1+m_2+\dots+m_k<n$ alors A n'est pas diagonalisable.
- Si $m_1+m_2+\dots+m_k=n$ alors :
  - si $\dim(E_{\lambda_j})<m_j$ pour un certain $j\in\{1,\dots,k\}$, alors A n'est pas diagonalisable.
  - si $\dim(E_{\lambda_j})=m_j$ pour tout $j\in\{1,\dots,k\}$, alors A est diagonalisable.

Application: Calcul des puissances de A :

Soit A une matrice carrée de taille $n \times n$.

Dans certaines situations pratiques, on a besoin de calculer $A^2, A^3, A^4, \ldots$

Si A est diagonalisable, alors on a $A = PDP^{-1}$ où D est une matrice diagonale, d'où :

$$A^2 = AA = (PDP^{-1})(PDP^{-1}) = PD\underbrace{(P^{-1}P)}_{=I}DP^{-1} = P\underbrace{DID}_{=D^2}P^{-1} \Rightarrow A^2 = PD^2P^{-1}$$

ce qui implique: $\boxed{A^k = PD^kP^{-1}}$ pour tout $k = 1, 2, 3, \ldots$

Si $D = \begin{bmatrix} d_{11} & & 0 \\ & d_{22} & \\ 0 & & \ddots \; d_{nn} \end{bmatrix}$ alors $D^k = \begin{bmatrix} d_{11}^k & & 0 \\ & d_{22}^k & \\ 0 & & \ddots \; d_{nn}^k \end{bmatrix}$ et de ce fait,

le calcul de PD^kP^{-1} est plus rapide que celui de A^k.

Exemple.

Nous avons vu que $A = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ -1 & -4 \end{bmatrix}$ est diagonalisable et que nous pouvons écrire

$$A = PDP^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -6 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\frac{1}{5}\begin{bmatrix} 1 & 6 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

d'où

$$A = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} -1 & -6 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 6 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Par conséquent,

$$\boxed{A^k = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} -1 & -6 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} (-3)^k & 0 \\ 0 & 2^k \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 6 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}}$$

Remarque. Comme A^k s'écrit comme le produit de trois matrices, cette formule est utile si $k > 3$.

k=3: $A^3 = \frac{1}{5}\begin{bmatrix}-1 & -6\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-27 & 0\\ 0 & 8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 6\\ -1 & -1\end{bmatrix} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix}-1 & -6\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-27 & -162\\ -8 & -8\end{bmatrix}$

$$= \frac{1}{5}\begin{bmatrix}27+48 & 162+48\\ -27-8 & -162-8\end{bmatrix} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix}75 & 210\\ -35 & -170\end{bmatrix} \Rightarrow A^3 = \begin{bmatrix}15 & 42\\ -7 & -34\end{bmatrix}$$

Calcul direct: $A^2 = \begin{bmatrix}3 & 6\\ -1 & -4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 6\\ -1 & -4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}9-6 & 18-24\\ -3+4 & -6+16\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3 & -6\\ 1 & 10\end{bmatrix}$

$$A^3 = A^2 A = \begin{bmatrix}3 & -6\\ 1 & 10\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 6\\ -1 & -4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}9+6 & 18+24\\ 3-10 & 6-40\end{bmatrix} \Rightarrow A^3 = \begin{bmatrix}15 & 42\\ -7 & -34\end{bmatrix}$$

k=10: $A^{10} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix}-1 & -6\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}(-3)^{10} & 0\\ 0 & 2^{10}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 6\\ -1 & -1\end{bmatrix} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix}-1 & -6\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}(-3)^{10} & 6\cdot(-3)^{10}\\ -2^{10} & -2^{10}\end{bmatrix}$

$$= \frac{1}{5}\begin{bmatrix}-(-3)^{10}+6\cdot 2^{10} & -6\cdot(-3)^{10}+6\cdot 2^{10}\\ (-3)^{10}-2^{10} & 6\cdot(-3)^{10}-2^{10}\end{bmatrix} = \ldots$$

$$\Rightarrow A^{10} = \begin{bmatrix}-10581 & -69630\\ 11605 & 70654\end{bmatrix}$$

Valeurs propres et espaces propres d'une application linéaire $T: V \to V$

Définition. Soit V un espace vectoriel de dimension $n > 0$.

Soit $T: V \to V$ une application linéaire quelconque.

Un vecteur non-nul $\vec{v} \in V$ est appelé vecteur propre de T si

$$T(\vec{v}) = \lambda \vec{v} \quad \text{pour un certain } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Le nombre λ est appelé valeur propre de T et on dit que $\vec{v} \in V$ est un vecteur propre de T associé à λ.

L'espace propre associé à λ, noté E_λ, est le sous-espace vectoriel de V engendré par les vecteurs propres associés à λ.

Remarque.

Nous avons vu que pour chaque choix de base $\mathcal{B}=\{\vec{b}_1,\dots,\vec{b}_n\}$ de V, nous pouvons construire une matrice $A_T^{\mathcal{B}}$ associée à T.

Nous pouvons montrer que pour tout choix de base $\mathcal{B}$ de V:

$$\lambda \text{ valeur propre de } T \iff \lambda \text{ valeur propre de } A_T^{\mathcal{B}}$$

$$\left.\begin{array}{l} \vec{v}=\alpha_1\vec{b}_1+\dots+\alpha_n\vec{b}_n\in V \\ \text{vecteur propre de } T \\ \text{associé à } \lambda \end{array}\right\} \iff \left\{\begin{array}{l} [\vec{v}]_{\mathcal{B}}=\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \vdots \\ \alpha_n\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^n \\ \text{vecteur propre de } A_T^{\mathcal{B}} \\ \text{associé à } \lambda \end{array}\right.$$

Par conséquent, pour trouver les valeurs propres et les espaces propres de T, il suffit de choisir une base $\mathcal{B}$ de V et trouver les valeurs propres et les espaces propres de $A_T^{\mathcal{B}}$.

Exemples.

Déterminer les valeurs propres et les espaces propres des applications linéaires suivantes:

1. $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, $(x,y)\mapsto(y,x)$ base canonique de $\mathbb{R}^2$: $\mathcal{E}=\left\{\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right\}$

$$\left.\begin{array}{l} T\left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} \\ T\left(\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\end{array}\right\} \Rightarrow A_T=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}=A$$

polynôme caractéristique: $p_c(\lambda)=\det(A-\lambda I)=\det\begin{bmatrix}-\lambda&1\\1&-\lambda\end{bmatrix}=\lambda^2-1$

$$=(\lambda-1)(\lambda+1)$$

valeurs propres: $\lambda_1=1$ (multiplicité $m_1=1$)

$\lambda_2=-1$ (multiplicité $m_{-1}=1$)

Espaces propres :

$\lambda_1 = 1$: $A - 1I = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{array}{c} \begin{array}{cc} x & y \\ \downarrow & \downarrow \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$

système associé : $x - y = 0 \iff x = y \iff \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, avec $t \in \mathbb{R}$

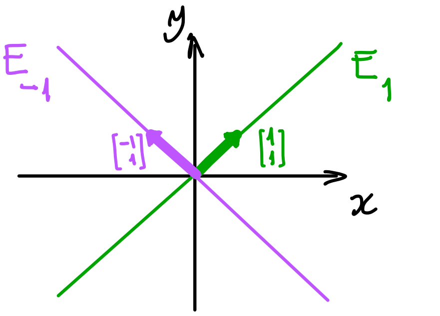
$\Rightarrow E_1 = \mathrm{Vect}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$

$\lambda_2 = -1$: $A - (-1)I = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{array}{c} \begin{array}{cc} x & y \\ \downarrow & \downarrow \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$

système associé : $x + y = 0 \iff x = -y \iff \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$, avec $t \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow E_{-1} = \mathrm{Vect}\left\{\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$

Ainsi, T est la symétrie d'axe $y = -x$ par rapport à la droite $y = x$.



2. $\varphi : \mathbb{P}_1 \longrightarrow \mathbb{P}_1$, $a + bx \longmapsto b + ax$ base canonique de $\mathbb{P}_1$: $\mathcal{E} = \{1, x\}$

$$\left.\begin{aligned} \varphi(1) &= \varphi(1 + 0x) = 0 + 1x = 0 \cdot 1 + 1 x \\ \varphi(x) &= \varphi(0 + 1x) = 1 + 0x = 1 \cdot 1 + 0 x \end{aligned}\right\} \Rightarrow A_\varphi = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = A$$

(même matrice que pour l'exemple 1)

$\Rightarrow$ valeurs propres : $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = -1$

Espaces propres :

$\lambda_1 = 1$: $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ vecteur propre de la matrice A associé à $\lambda_1 = 1$ $\iff$ $p_1(x) = 1 \cdot 1 + 1 \cdot x = 1 + x \in \mathbb{P}_1$ vecteur propre de φ associé à $\lambda_1 = 1$

$\Rightarrow E_1 = \mathrm{Vect}\{1 + x\} \subset \mathbb{P}_1$

$\lambda_2 = -1$: $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ vecteur propre de la matrice A associé à $\lambda_2 = -1$ $\iff$ $p_2(x) = -1 \cdot 1 + 1 \cdot x = -1 + x \in \mathbb{P}_1$ vecteur propre de φ associé à $\lambda_2 = -1$

$\Rightarrow E_2 = \mathrm{Vect}\{-1 + x\} \subset \mathbb{P}_1$