

Application: Calcul des puissances de A :

Soit A une matrice carrée de taille $n \times n$.

Dans certaines situations pratiques, on a besoin de calculer $A^2, A^3, A^4, \dots$

Si A est diagonalisable, alors on a $A = P D P^{-1}$ où D est une matrice diagonale, d'où :

$$A^2 = AA = (P D P^{-1})(P D P^{-1}) = P D \underbrace{(P^{-1} P)}_{=I} D P^{-1} = P \underbrace{D I D}_{=D^2} P^{-1} \Rightarrow A^2 = P D^2 P^{-1}$$

ce qui implique:

$$\boxed{A^k = P D^k P^{-1}} \quad \text{pour tout } k=1, 2, 3, \dots$$

$$\text{Si } D = \begin{bmatrix} d_{11} & & 0 \\ & d_{22} & \\ 0 & & \ddots \\ & & & d_{nn} \end{bmatrix} \text{ alors } D^k = \begin{bmatrix} d_{11}^k & & 0 \\ & d_{22}^k & \\ 0 & & \ddots \\ & & & d_{nn}^k \end{bmatrix} \text{ et de ce fait,}$$

le calcul de $P D^k P^{-1}$ est plus rapide que celui de A^k .

Exemple.

Nous avons vu que $A = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ -1 & -4 \end{bmatrix}$ est diagonalisable et que nous pouvons écrire

$$A = PDP^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & -6 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

d'où

$$A = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} -1 & -6 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Par conséquent,

$$A^k = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} -1 & -6 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (-3)^k & 0 \\ 0 & 2^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Remarque. Comme A^k s'écrit comme le produit de trois matrices, cette formule est utile si $k > 3$.

$$\underline{k=3}: A^3 = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} -1 & -6 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -27 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} -1 & -6 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -27 & -162 \\ -8 & -8 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 27+48 & 162+48 \\ -27-8 & -162-8 \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 75 & 210 \\ -35 & -170 \end{bmatrix} \Rightarrow A^3 = \begin{bmatrix} 15 & 42 \\ -7 & -34 \end{bmatrix}$$

Calcul direct: $A^2 = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ -1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ -1 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9-6 & 18-24 \\ -3+4 & -6+16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -6 \\ 1 & 10 \end{bmatrix}$

$$A^3 = A^2 A = \begin{bmatrix} 3 & -6 \\ 1 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ -1 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9+6 & 18+24 \\ 3-10 & 6-40 \end{bmatrix} \Rightarrow A^3 = \begin{bmatrix} 15 & 42 \\ -7 & -34 \end{bmatrix}$$

$$\underline{k=10}: A^{10} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} -1 & -6 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (-3)^{10} & 0 \\ 0 & 2^{10} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} -1 & -6 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (-3)^{10} & 6 \cdot (-3)^{10} \\ -2^{10} & -2^{10} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{5} \begin{bmatrix} -(-3)^{10} + 6 \cdot 2^{10} & -6 \cdot (-3)^{10} + 6 \cdot 2^{10} \\ (-3)^{10} - 2^{10} & 6 \cdot (-3)^{10} - 2^{10} \end{bmatrix} = \dots$$

$$\Rightarrow A^{10} = \begin{bmatrix} -10581 & -69630 \\ 11605 & 70654 \end{bmatrix}$$

Valeurs propres et espaces propres d'une application linéaire $T: V \rightarrow V$

Définition. Soit V un espace vectoriel de dimension $n > 0$.

Soit $T: V \rightarrow V$ une application linéaire quelconque.

Un vecteur non-nul $\vec{v} \in V$ est appelé vecteur propre de T si

$$T(\vec{v}) = \lambda \vec{v} \quad \text{pour un certain } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Le nombre λ est appelé valeur propre de T et on dit que $\vec{v} \in V$ est un vecteur propre de T associé à λ .

L'espace propre associé à λ , noté E_λ , est le sous-espace vectoriel de V engendré par les vecteurs propres associés à λ .

Remarque.

Nous avons vu que pour chaque choix de base $\mathcal{B} = \{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n\}$ de V , nous pouvons construire une matrice $A_T^{\mathcal{B}}$ associée à T .

Nous pouvons montrer que pour tout choix de base $\mathcal{B}$ de V :

λ valeur propre de $T \iff \lambda$ valeur propre de $A_T^{\mathcal{B}}$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v} = \alpha_1 \vec{b}_1 + \dots + \alpha_n \vec{b}_n \in V \\ \text{vecteur propre de } T \\ \text{associé à } \lambda \end{array} \right\} \iff \left\{ \begin{array}{l} [\vec{v}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n \\ \text{vecteur propre de } A_T^{\mathcal{B}} \\ \text{associé à } \lambda \end{array} \right.$$

Par conséquent, pour trouver les valeurs propres et les espaces propres de T , il suffit de choisir une base $\mathcal{B}$ de V et trouver les valeurs propres et les espaces propres de $A_T^{\mathcal{B}}$.

Exemples.

Déterminer les valeurs propres et les espaces propres des applications linéaires suivantes:

$$1. T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) \mapsto (y, x)$$

$$\text{base canonique de } \mathbb{R}^2: \mathcal{E} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \Rightarrow A_T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = A$$

$$\begin{aligned} \text{polynôme caractéristique: } p_c(\lambda) &= \det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - 1 \\ &= (\lambda - 1)(\lambda + 1) \end{aligned}$$

$$\text{valeurs propres: } \lambda_1 = 1 \quad (\text{multiplicité } m_1 = 1)$$

$$\lambda_2 = -1 \quad (\text{multiplicité } m_{-1} = 1)$$

Espaces propres:

$$\underline{\lambda_1 = 1}: A - 1I = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

x ↓ y ↓

système associé: $\textcolor{blue}{x} - \textcolor{orange}{y} = 0 \Leftrightarrow \textcolor{blue}{x} = \textcolor{orange}{y} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \textcolor{orange}{t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, avec $\textcolor{orange}{t} \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow E_1 = \text{Vect} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

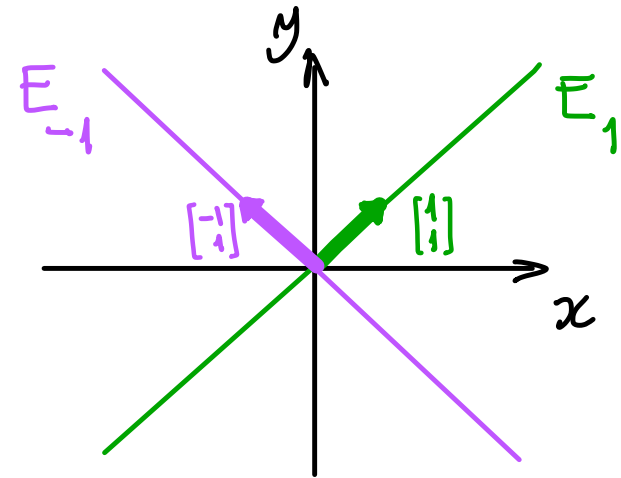
$$\underline{\lambda_2 = -1}: A - (-1)I = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

x ↓ y ↓

système associé: $\textcolor{blue}{x} + \textcolor{orange}{y} = 0 \Leftrightarrow \textcolor{blue}{x} = -\textcolor{orange}{y} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \textcolor{orange}{t} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$, avec $\textcolor{orange}{t} \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow E_{-1} = \text{Vect} \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Ainsi, T est la symétrie d'axe $y = -x$
par rapport à la droite $y = x$.



2. $\varphi: \mathbb{P}_1 \longrightarrow \mathbb{P}_1$ base canonique de $\mathbb{P}_1$: $\mathcal{E} = \{1, x\}$
 $a+bx \longmapsto b+ax$

$$\left. \begin{array}{l} \varphi(1) = \varphi(1+0x) = 0+1x = 0 \cdot 1 + 1 \cdot x \\ \varphi(x) = \varphi(0+1x) = 1+0x = 1 \cdot 1 + 0 \cdot x \end{array} \right\} \Rightarrow A_\varphi = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = A$$

(même matrice que pour l'exemple 1)

$\Rightarrow$ valeurs propres: $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = -1$

Espaces propres:

$\lambda_1 = 1$: $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ vecteur propre de la matrice A associé à $\lambda_1 = 1$ $\Leftrightarrow$ $p_1(x) = 1 \cdot 1 + 1 \cdot x = 1+x \in \mathbb{P}_1$ vecteur propre de φ associé à $\lambda_1 = 1$

$\Rightarrow E_1 = \text{Vect} \{1+x\} \subset \mathbb{P}_1$

$\lambda_2 = -1$: $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ vecteur propre de la matrice A associé à $\lambda_2 = -1$ $\Leftrightarrow$ $p_2(x) = -1 \cdot 1 + 1 \cdot x = -1+x \in \mathbb{P}_1$ vecteur propre de φ associé à $\lambda_2 = -1$

$\Rightarrow E_2 = \text{Vect} \{-1+x\} \subset \mathbb{P}_1$