

4. Trouver les espaces propres de $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -3 & -2 & 3 \\ -2 & -2 & 3 \end{bmatrix}$

polynôme caractéristique:

$$\begin{aligned}
 p_c(\lambda) &= \det \begin{bmatrix} -\lambda & -1 & 1 \\ -3 & -2-\lambda & 3 \\ -2 & -2 & 3-\lambda \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{C_1 \rightarrow C_1 - C_2 \\ C_3 \rightarrow C_3 + C_2}]{\uparrow} \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & -1 & 0 \\ -1+\lambda & -2-\lambda & 1-\lambda \\ 0 & -2 & 1-\lambda \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{L_2 \rightarrow L_2 + L_1}]{\uparrow} \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & -1 & 0 \\ 0 & -3-\lambda & 1-\lambda \\ 0 & -2 & 1-\lambda \end{bmatrix} \\
 &\xrightarrow[\substack{\text{dev. } C_1}]{\uparrow} (1-\lambda) \det \begin{bmatrix} -3-\lambda & 1-\lambda \\ -2 & 1-\lambda \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{L_1 \rightarrow L_1 - L_2}]{\uparrow} (1-\lambda) \det \begin{bmatrix} -1-\lambda & 0 \\ -2 & 1-\lambda \end{bmatrix} = (1-\lambda)(-1-\lambda)(1-\lambda)
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow p_c(\lambda) = -(\lambda-1)^2(\lambda+1)$$

valeurs propres:

$$\boxed{\lambda_1 = 1} \quad (\text{multiplicité } m_1 = 2) \Rightarrow 1 \leq \dim(E_1) \leq 2$$

$$\boxed{\lambda_2 = -1} \quad (\text{multiplicité } m_{-1} = 1) \Rightarrow \dim(E_{-1}) = 1$$

Espaces propres :

$\lambda_1 = 1$:

$$A - 1I = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -3 & -2 & 3 \\ -2 & -2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow$
 $x \quad y \quad z$

$$\text{rang}(A - 1I) = 1 \Rightarrow \dim(E_1) = 3 - 1 = 2$$

système associé :

$$x + y - z = 0 \Leftrightarrow x = -y + z \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \text{ avec } s, t \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow E_1 = \text{Vect}\{(-1, 1, 0), (1, 0, 1)\}$$

Vérification :

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -3 & -2 & 3 \\ -2 & -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 - 1 + 0 \\ 3 - 2 + 0 \\ 2 - 2 + 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 1 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -3 & -2 & 3 \\ -2 & -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 + 0 + 1 \\ -3 + 0 + 3 \\ -2 + 0 + 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\lambda_2 = -1:}$$

$$A - (-1)I = \begin{bmatrix} -(-1) & -1 & 1 \\ -3 & -2-(-1) & 3 \\ -2 & -2 & 3-(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -3 & -1 & 3 \\ -2 & -2 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_3 \rightarrow L_3 + 2L_1]{L_2 \rightarrow L_2 + 3L_1} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & 6 \\ 0 & -4 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_3 \rightarrow L_3 - L_2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 \rightarrow -\frac{1}{4}L_2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 \rightarrow L_1 + L_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\begin{matrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ x & y & z \end{matrix}$

$$\text{rang}(A - (-1)I) = 2 \Rightarrow \dim(E_{-1}) = 3 - 2 = 1$$

$$\text{système associé: } \begin{cases} x - \frac{1}{2}z = 0 \\ y - \frac{3}{2}z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2}z \\ y = \frac{3}{2}z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \text{ avec } t \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow E_{-1} = \text{Vect}\{(1, 3, 2)\}$$

$$\text{Vérification: } \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -3 & -2 & 3 \\ -2 & -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 - 3 + 2 \\ -3 - 6 + 6 \\ -2 - 6 + 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ -2 \end{bmatrix} = (-1) \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

En résumé, la matrice $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -3 & -2 & 3 \\ -2 & -2 & 3 \end{bmatrix}$ a deux valeurs propres:

$$\boxed{\lambda_1 = 1} \quad (\text{multiplicité } m_1 = 2)$$

$$\boxed{\lambda_2 = -1} \quad (\text{multiplicité } m_{-1} = 1)$$

espaces propres associées: $E_1 = \text{Vect}\{(-1, 1, 0), (1, 0, 1)\}$ avec $\dim(E_1) = 2$

$$E_{-1} = \text{Vect}\{(1, 3, 2)\} \quad \text{avec } \dim(E_{-1}) = 1$$

Affirmation. Les vecteurs $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ et $\vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ sont linéairement indépendants (car $\det \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = -\det \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = 2 \neq 0$ ou ...)

Par conséquent, $B = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

Comme $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ et $\vec{v}_3$ sont des vecteurs propres de A on a :

$$A\vec{v}_1 = 1\vec{v}_1 = 1\vec{v}_1 + 0\vec{v}_2 + 0\vec{v}_3$$

$$A\vec{v}_2 = 1\vec{v}_2 = 0\vec{v}_1 + 1\vec{v}_2 + 0\vec{v}_3$$

$$A\vec{v}_3 = (-1)\vec{v}_3 = 0\vec{v}_1 + 0\vec{v}_2 + (-1)\vec{v}_3$$

Par conséquent, la matrice associée à l'application linéaire

$T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ par rapport à la base $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ est :

$$A_{\mathcal{B}}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Il s'agit d'une matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont les valeurs propres de A .

Rappel.

Soient A et B deux matrices carrées de taille $n \times n$.

On dit que les matrices A et B sont **semblables** s'il existe une matrice inversible P telle que

$$B = PAP^{-1}$$

Exemple important.

Les matrices A_T^C et A_T^B sont semblables car on a

$$A_T^C = P A_T^B P^{-1} \quad \text{avec } P = P^{CB}$$

Théorème.

Si A et B sont deux matrices semblables, alors elles possèdent le même polynôme caractéristique.

Preuve. A voir : $\det(A - \lambda I) \stackrel{?}{=} \det(B - \lambda I)$

Par hypothèse : $B = PAP^{-1}$

$$\begin{aligned}\text{Nous avons : } B - \lambda I &= PAP^{-1} - \lambda I \\ &= PAP^{-1} - \lambda PIP^{-1} \\ &= P(AP^{-1} - \lambda IP^{-1}) \\ &= P(A - \lambda I)P^{-1}\end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{aligned}\det(B - \lambda I) &= \det(P(A - \lambda I)P^{-1}) \\ &= \det((A - \lambda I)P^{-1}P) \quad [\text{Rappel: } \det(CD) = \det(DC)] \\ &= \det(A - \lambda I)\end{aligned}$$

Autre possibilité :

$$\begin{aligned}\det(B - \lambda I) &= \det(P(A - \lambda I)P^{-1}) = \det(P) \det(A - \lambda I) \det(P^{-1}) \\ &= \det(A - \lambda I) \underbrace{\det(P) \det(P^{-1})}_{= \det(PP^{-1}) = \det(I) = 1} \\ &= \det(A - \lambda I)\end{aligned}$$


Conséquence.

Si A et B sont deux matrices semblables, elles ont les mêmes valeurs propres avec la même multiplicité.

Théorème.

Soit A une matrice de taille $n \times n$.

Soient $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k$ des vecteurs propres de A associés à des valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ *distinctes*.

Alors ces vecteurs sont linéairement indépendants.

Preuve. On suppose que $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k\}$ est lié.

Par conséquent, l'un des vecteurs peut s'écrire comme une combinaison linéaire des autres.

Soit $p < k$ le plus grand indice tel que $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p\}$ est linéairement indépendant.

Ainsi, $\vec{v}_{p+1}$ peut s'écrire comme combinaison linéaire de $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_p$:

$$\vec{v}_{p+1} = \alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 + \dots + \alpha_p \vec{v}_p$$

En multipliant à gauche par A on obtient :

$$\begin{aligned} A\vec{v}_{p+1} &= A(\alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 + \dots + \alpha_p \vec{v}_p) \\ &= \alpha_1 A\vec{v}_1 + \alpha_2 A\vec{v}_2 + \dots + \alpha_p A\vec{v}_p \end{aligned}$$

Comme $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{p+1}$ sont des vecteurs propres de A on a :

$$\lambda_{p+1} \vec{v}_{p+1} = \alpha_1 \lambda_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \lambda_2 \vec{v}_2 + \dots + \alpha_p \lambda_p \vec{v}_p$$

Comme $\vec{v}_{p+1}$ s'écrit comme combinaison linéaire de $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p$ on a :

$$\lambda_{p+1} (\alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 + \dots + \alpha_p \vec{v}_p) = \alpha_1 \lambda_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \lambda_2 \vec{v}_2 + \dots + \alpha_p \lambda_p \vec{v}_p$$

ou encore

$$\alpha_1(\lambda_{p+1}-\lambda_1)\vec{v}_1 + \alpha_2(\lambda_{p+1}-\lambda_2)\vec{v}_2 + \dots + \alpha_p(\lambda_{p+1}-\lambda_p)\vec{v}_p = \vec{0}$$

Comme $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p$ sont linéairement indépendants on a

$$\alpha_1(\lambda_{p+1}-\lambda_1)=0, \alpha_2(\lambda_{p+1}-\lambda_2)=0, \dots, \alpha_p(\lambda_{p+1}-\lambda_p)=0$$

Comme par hypothèse les valeurs propres sont distinctes,
on trouve

$$\alpha_1=0, \alpha_2=0, \dots, \alpha_p=0$$

ce qui implique $\vec{v}_{p+1} = \vec{0}$, en contradiction avec le

fait que $\vec{v}_{p+1}$ est un vecteur propre de A . Par conséquent,
 $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k\}$ est linéairement indépendant. ■

Définition. Soit A une matrice carrée de taille $n \times n$.

On dit que A est diagonalisable si A est semblable à une matrice diagonale D :

$$A = P D P^{-1} \iff A P = P D$$

Exemple.

La matrice $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -3 & -2 & 3 \\ -2 & -2 & 3 \end{bmatrix}$ est diagonalisable.

En effet, nous avons vu que A est semblable à $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

Soient $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ les colonnes de P :

$$P = [\vec{v}_1 \ \vec{v}_2 \ \dots \ \vec{v}_n]$$

$$\text{On a } AP = [A\vec{v}_1 \ A\vec{v}_2 \ \dots \ A\vec{v}_n]$$

$$\text{et } PD = [\vec{v}_1 \ \vec{v}_2 \ \dots \ \vec{v}_n] \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} = [\lambda_1 \vec{v}_1 \ \lambda_2 \vec{v}_2 \ \dots \ \lambda_n \vec{v}_n]$$

Par conséquent,

$$AP = PD \iff A\vec{v}_j = \lambda_j \vec{v}_j, \text{ pour } j=1, \dots, n.$$

Autrement dit, les colonnes de P sont des vecteurs propres de A et les coefficients diagonaux de D , les valeurs propres associées!

Exemples.

1. Soit $A = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ -1 & -4 \end{bmatrix}$.

Nous avons vu que $\lambda_1 = -3$ et $\lambda_2 = 2$ sont les valeurs propres de A et $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ et $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} -6 \\ 1 \end{bmatrix}$ sont des vecteurs propres de A associés aux valeurs propres λ_1 et λ_2 respectivement.

Dans ce cas, nous pouvons construire une matrice diagonale $D = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ formée des valeurs propres de A et une matrice inversible $P = \begin{bmatrix} -1 & -6 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ formée de vecteurs propres associés.

Le calcul nous donne $P^{-1} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$.

La matrice A est diagonalisable car elle peut s'écrire $A = PDP^{-1}$.

En effet,

$$PDP^{-1} = \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & -6 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}}_{= \begin{bmatrix} 3 & -12 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}} \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 3 & -12 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 15 & 30 \\ -5 & -20 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow PDP^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ -1 & -4 \end{bmatrix} = A$$

Alternativement, nous pouvons prendre $P = \begin{bmatrix} -6 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$

$$\text{et } P^{-1} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}:$$

En effet,

$$PDP^{-1} = \underbrace{\begin{bmatrix} -6 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}}_{= \begin{bmatrix} -12 & 3 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}} \frac{1}{5} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 6 \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} -12 & 3 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 6 \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 15 & 30 \\ -5 & -20 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow PDP^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ -1 & -4 \end{bmatrix} = A$$

2. Soit $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -2 \\ -5 & 3 & 2 \\ -2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$

Nous avons vu que $\lambda_1=1$, $\lambda_2=2$ et $\lambda_3=5$ sont les valeurs propres de A et $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ et $\vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ sont des vecteurs propres de A associés à λ_1 , λ_2 et λ_3 respectivement. Comme elles sont distinctes, les vecteurs $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ et $\vec{v}_3$ sont linéairement indépendants.

Par conséquent, la matrice $P = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ est inversible et nous pouvons écrire

$$A = PDP^{-1}, \quad \text{avec } D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

La matrice A est donc diagonalisable.

Comme par hypothèse $P = [\vec{v}_1 \ \vec{v}_2 \ \dots \ \vec{v}_n]$ est inversible, les colonnes de P sont linéairement indépendantes et forment donc une base de $\mathbb{R}^n$.

Si λ est une valeur propre de A de multiplicité $m \geq 1$, alors il y a m coefficients diagonaux de D égaux à λ et il y a m colonnes de P associées. Il y a donc m vecteurs linéairement indépendants qui sont des vecteurs propres de A associés à λ , d'où $\dim(E_\lambda) = m$.

Théorème. Soit A une matrice de taille $n \times n$. On a l'équivalence:

$$A \text{ est diagonalisable} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{il existe des nombres } \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R} \text{ tels que} \\ p_c(\lambda) = (-1)^n (\lambda - \lambda_1)^{m_1} (\lambda - \lambda_2)^{m_2} \dots (\lambda - \lambda_k)^{m_k} \\ \text{avec } m_1 + \dots + m_k = n \\ \text{et } \dim(E_{\lambda_j}) = m_j, \text{ pour } j = 1, \dots, k \end{cases}$$

Corollaire. Soit A une matrice de taille $n \times n$.

Si A possède n valeurs propres *distinctes* alors A est diagonalisable

Preuve. Soient $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ les n valeurs propres distinctes de A .

Par construction, elles sont toutes de multiplicité 1 , d'où

$$p_c(\lambda) = (-1)^n (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \dots (\lambda - \lambda_n) \text{ et } \dim(E_{\lambda_j}) = 1 \text{ pour } j = 1, \dots, n. \quad \blacksquare$$

Exemples.

1. $A = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$ est diagonalisable.

En effet, comme $p_c(\lambda) = \det \begin{bmatrix} -\lambda & 4 \\ 4 & -\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - 4^2 = (\lambda - 4)(\lambda + 4)$, la matrice A possède deux valeurs propres distinctes : $\lambda_1 = 4$ et $\lambda_2 = -4$.

2. $B = \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ n'est pas diagonalisable.

En effet, comme $p_c(\lambda) = \det \begin{bmatrix} -\lambda & 5 \\ 0 & -\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2$, la matrice B possède une valeur propre ($\lambda = 0$) de multiplicité $m = 2$, mais l'espace propre associé E_0 ne satisfait pas $\dim(E_0) = 2$ car $\text{rang}(B - 0I) = \text{rang}(B) = 1$ et $\dim(E_0) = 2 - 1 = 1 < 2$.

Méthode de diagonalisation.

Pour déterminer si une matrice A de taille $n \times n$ est diagonalisable :

- Calculer les valeurs propres de A : $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$

et leurs multiplicités : $m_1, m_2, \dots, m_k$

- Si $m_1 + m_2 + \dots + m_k < n$ alors A n'est pas diagonalisable.

- Si $m_1 + m_2 + \dots + m_k = n$ alors :

• si $\dim(E_{\lambda_j}) < m_j$ pour un certain $j \in \{1, \dots, k\}$,

alors A n'est pas diagonalisable.

• si $\dim(E_{\lambda_j}) = m_j$ pour tout $j \in \{1, \dots, k\}$, alors A est diagonalisable.