
5. Valeurs propres et vecteurs propres

Dans ce chapitre, nous allons considérer seulement des applications linéaires de la forme $T: V \rightarrow V$.

Dans beaucoup de situations pratiques, il est utile de déterminer les vecteurs $\vec{v} \in V$ pour lesquels $T(\vec{v})$ est un multiple de $\vec{v}$:

$$T(\vec{v}) = \lambda \vec{v}, \text{ avec } \lambda \in \mathbb{R}$$

Définition. Soit A une matrice carrée de taille $n \times n$.

On dit qu'un vecteur non-nul $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ est un vecteur propre de A si le vecteur $A\vec{v}$ est un multiple de $\vec{v}$:

$$\boxed{A\vec{v} = \lambda\vec{v}} \quad \text{pour un certain } \lambda \in \mathbb{R}$$

Le nombre $\lambda \in \mathbb{R}$ est appelé valeur propre de A et on dit que $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ est un vecteur propre de A associé à la valeur propre $\lambda \in \mathbb{R}$.

Exemple.

Le vecteur $\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ est un vecteur propre de la matrice $A = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ -1 & -4 \end{bmatrix}$ associé à la valeur propre $\lambda = -3$. En effet,

$$A\vec{v} = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ -1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3-6 \\ -1+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 3 \end{bmatrix} = -3 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

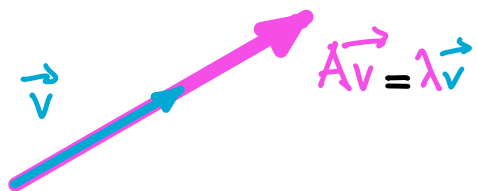
$$\Rightarrow A\vec{v} = -3\vec{v}$$

Interprétation géométrique dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$.

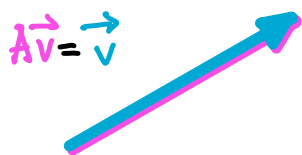
Soit A une matrice carrée (2×2 ou 3×3) et $\lambda \in \mathbb{R}$ une valeur propre de A .

Soit $\vec{v} \neq \vec{0}$ un vecteur propre de A associé à λ .

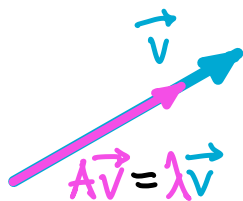
- Si $\lambda > 1$ alors A dilate $\vec{v}$:



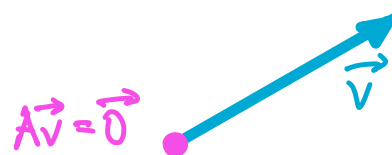
- Si $\lambda = 1$ alors A fixe $\vec{v}$:



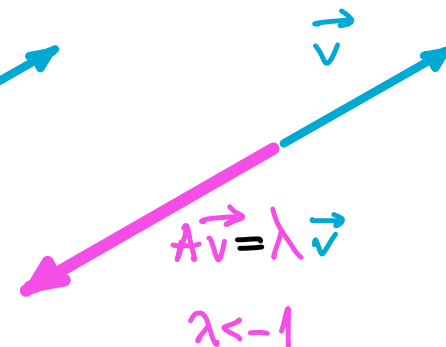
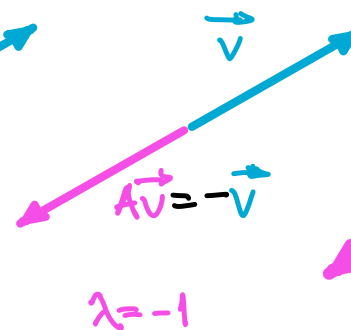
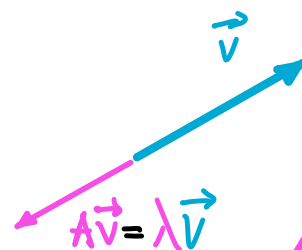
- Si $0 < \lambda < 1$ alors A contracte $\vec{v}$:



- Si $\lambda = 0$ alors A annule $\vec{v}$:



- Si $\lambda < 0$ alors A inverse la direction de $\vec{v}$:



Calcul des valeurs propres.

$$\begin{aligned} \text{On a } A\vec{v} &= \lambda \vec{v} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} - \lambda \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}}_{= I_n} \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \\ &\Leftrightarrow \left(\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$A\vec{v} = \lambda \vec{v} \Leftrightarrow (A - \lambda I_n) \vec{v} = \vec{0}$$

Conséquence.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v} \neq \vec{0} \text{ vecteur propre de } A \\ \text{associé à la valeur propre } \lambda \end{array} \right\} \begin{array}{l} \Leftrightarrow \vec{v} \neq \vec{0} \text{ solution de } (A - \lambda I_n) \vec{v} = \vec{0} \\ \Leftrightarrow \vec{v} \neq \vec{0} \text{ appartient à } \text{Nul}(A - \lambda I_n) \end{array}$$

$$\Leftrightarrow (A - \lambda I_n) \vec{v} = \vec{0}$$

possède une infinité de solutions

$$\Leftrightarrow \dim(\text{Nul}(A - \lambda I_n)) > 0$$

$$\Leftrightarrow n - \text{rang}(A - \lambda I_n) > 0$$

$$\Leftrightarrow \text{rang}(A - \lambda I_n) < n$$

$$\Leftrightarrow \det(A - \lambda I_n) = 0$$

Définition. Soit A une matrice carrée de taille $n \times n$.

Le polynôme caractéristique de A , noté $P_c(\lambda)$, est défini par

$$P_c(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$$

Il s'agit d'un polynôme de degré n dans la variable λ .

Théorème. Nous avons l'équivalence

$$\lambda \text{ valeur propre de } A \Leftrightarrow P_c(\lambda) = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda \text{ est une racine de } P_c$$

Exemples.

1. Trouver les valeurs propres de $A = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ -1 & -4 \end{bmatrix}$

polynôme caractéristique:

$$\begin{aligned} p_c(\lambda) &= \det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} 3-\lambda & 6 \\ -1 & -4-\lambda \end{bmatrix} = (3-\lambda)(-4-\lambda) - 6(-1) \\ &= -12 - 3\lambda + 4\lambda + \lambda^2 + 6 = \lambda^2 + \lambda - 6 = (\lambda + 3)(\lambda - 2) \end{aligned}$$

valeurs propres: $\lambda_1 = -3$ et $\lambda_2 = 2$

2. Trouver les valeurs propres de $B = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$

polynôme caractéristique:

$$\begin{aligned} p_c(\lambda) &= \det(B - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} 5-\lambda & -1 \\ 3 & 1-\lambda \end{bmatrix} = (5-\lambda)(1-\lambda) - 3(-1) \\ &= 5 - 5\lambda - \lambda + \lambda^2 + 3 = \lambda^2 - 6\lambda + 8 = (\lambda - 2)(\lambda - 4) \end{aligned}$$

valeurs propres: $\lambda_1 = 2$ et $\lambda_2 = 4$

3. Trouver les valeurs propres de $C = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$

polynôme caractéristique:

$$\begin{aligned} p_C(\lambda) &= \det(C - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} -2-\lambda & -1 \\ 5 & 2-\lambda \end{bmatrix} = (-2-\lambda)(2-\lambda) - 5(-1) \\ &= \lambda^2 - 4 + 5 = \lambda^2 + 1 \end{aligned}$$

$\Rightarrow C$ n'a pas de valeurs propres dans $\mathbb{R}$.

Par contre, comme $\lambda^2 + 1 = (\lambda + i)(\lambda - i)$, alors

$\lambda_1 = i$ et $\lambda_2 = -i$ sont les valeurs propres de C dans $\mathbb{C}$.

4. Trouver les valeurs propres de $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -2 \\ -5 & 3 & 2 \\ -2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$

polynôme caractéristique:

$$p_c(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} 4-\lambda & 2 & -2 \\ -5 & 3-\lambda & 2 \\ -2 & 4 & 1-\lambda \end{bmatrix} \xrightarrow{C_3 \rightarrow C_3 + C_2} \det \begin{bmatrix} 4-\lambda & 2 & 0 \\ -5 & 3-\lambda & 5-\lambda \\ -2 & 4 & 5-\lambda \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_2 \rightarrow L_2 - L_3} \det \begin{bmatrix} 4-\lambda & 2 & 0 \\ -3 & -1-\lambda & 0 \\ -2 & 4 & 5-\lambda \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{dér. } C_3} (5-\lambda) \det \begin{bmatrix} 4-\lambda & 2 \\ -3 & -1-\lambda \end{bmatrix}$$

$$= (5-\lambda) [(4-\lambda)(-1-\lambda) - 2(-3)] = (5-\lambda)(\lambda^2 - 3\lambda - 4 + 6)$$

$$= (5-\lambda)(\lambda^2 - 3\lambda + 2) = (5-\lambda)(\lambda-1)(\lambda-2)$$

valeurs propres: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 5$

Remarques.

- Si $\det(A) = 0$, alors $\lambda = 0$ est une racine de $p_c(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$.

Ainsi, nous avons l'équivalence:

A n'est pas inversible $\Leftrightarrow \lambda = 0$ est une valeur propre de A

- Si A est triangulaire, alors $A - \lambda I_n$ est aussi triangulaire:

$$A - \lambda I_n = \begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn} - \lambda \end{bmatrix}$$

$$\text{d'où : } p_c(\lambda) = (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) \dots (a_{nn} - \lambda)$$

Dans ce cas, les valeurs propres de A se trouvent sur la diagonale.

Calcul des vecteurs propres.

Rappel.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v} \neq \vec{0} \text{ vecteur propre de } A \\ \text{associé à la valeur propre } \lambda \end{array} \right\} \begin{array}{l} \Leftrightarrow \vec{v} \neq \vec{0} \text{ solution de } (A - \lambda I) \vec{v} = \vec{0} \\ \Leftrightarrow \vec{v} \neq \vec{0} \text{ appartient à } \text{Nul}(A - \lambda I_n) \end{array}$$

Définition. Soit A une matrice carrée de taille $n \times n$.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ une valeur propre de A . L'espace propre de A associé à λ noté E_λ , est défini par

$$E_\lambda = \text{Nul}(A - \lambda I)$$

Ainsi, par définition, l'espace propre de A associé à λ contient tous les vecteurs propres de A associés à λ ainsi que le vecteur zéro.

Remarques.

- Par construction, $\dim(E_\lambda) > 0$ (car $\text{rang}(A - \lambda I_n) < n$).

Par conséquent, si lors d'un calcul on trouve $\dim(E_\lambda) = 0$, cela veut dire que λ n'est pas une valeur propre de A !

- Soit m_λ la multiplicité de λ en tant que racine de $p_c(\lambda)$.
[p.ex. si $p_c(\lambda) = (\lambda - 3)^2(\lambda - 5)(\lambda + 4)^3$ alors $m_3 = 2$, $m_5 = 1$ et $m_{-4} = 3$]

On peut montrer que $\dim(E_\lambda) \leq m_\lambda$, d'où

$$1 \leq \dim(E_\lambda) \leq m_\lambda$$

En particulier, si λ est une racine simple de $p_c(\lambda)$ nous avons $m_\lambda = 1$ et $\dim(E_\lambda) = 1$.

- Le nombre $\dim(E_\lambda)$ est parfois appelé multiplicité géométrique de la valeur propre λ de A .
- Le nombre m_λ est parfois appelé multiplicité algébrique de la valeur propre λ de A .

Exemples.

1. Trouver les espaces propres de $A = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ -1 & -4 \end{bmatrix}$

polynôme caractéristique: $p_c(\lambda) = \det \begin{bmatrix} 3-\lambda & 6 \\ -1 & -4-\lambda \end{bmatrix} = \dots = (\lambda + 3)(\lambda - 2)$

valeurs propres: $\lambda_1 = -3$ et $\lambda_2 = 2$

Comme $m_{-3} = 1$ et $m_2 = 1$, on s'attend à trouver $\dim(E_{-3}) = 1$ et $\dim(E_2) = 1$

$$\underline{\lambda_1 = -3}: A - (-3)I = \begin{bmatrix} 3-(-3) & 6 \\ -1 & -4-(-3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 6 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\uparrow \quad \uparrow$
 $x \quad y$

$$\text{rang}(A + 3I) = 1 \Rightarrow \dim(E_{-3}) = 2 - 1 = 1$$

$$\text{système associé: } x + y = 0 \Leftrightarrow x = -y \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \text{ avec } t \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow E_{-3} = \text{Vect} \{(-1, 1)\}$$

Vérification: $\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ -1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3+6 \\ 1-4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \end{bmatrix} = -3 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\lambda_2 = 2$: $A - 2I = \begin{bmatrix} 3-2 & 6 \\ -1 & -4-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ -1 & -6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\begin{matrix} \uparrow & \uparrow \\ x & y \end{matrix}$

$\text{rang}(A - 2I) = 1 \Rightarrow \dim(E_2) = 2 - 1 = 1$

système associé: $x + 6y = 0 \Leftrightarrow x = -6y \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} -6 \\ 1 \end{bmatrix}, \text{ avec } t \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow E_2 = \text{Vect} \{(-6, 1)\}$

Vérification: $\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ -1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -6 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -18+6 \\ 6-4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12 \\ 2 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} -6 \\ 1 \end{bmatrix}$

2. Trouver les espaces propres de $B = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$

polynôme caractéristique: $p_c(\lambda) = \det \begin{bmatrix} 5-\lambda & -1 \\ 3 & 1-\lambda \end{bmatrix} = \dots = (\lambda-2)(\lambda-4)$

valeurs propres: $\lambda_1 = 2$ et $\lambda_2 = 4$

Comme $m_2 = 1$ et $m_4 = 1$, on s'attend à trouver

$$\dim(E_2) = 1 \quad \text{et} \quad \dim(E_4) = 1$$

$$\underline{\lambda_1 = 2}: B - 2I = \begin{bmatrix} 5-2 & -1 \\ 3 & 1-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\uparrow \quad \uparrow$
 $x \quad y$

$$\text{rang}(B - 2I) = 1 \Rightarrow \dim(E_2) = 2 - 1 = 1$$

$$\text{système associé: } 3x - y = 0 \Leftrightarrow y = 3x \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \text{ avec } t \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow E_2 = \text{Vect} \{ (1, 3) \}$$

Vérification: $\begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5-3 \\ 3+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$

$\lambda_2 = 4$: $B - 4I = \begin{bmatrix} 5-4 & -1 \\ 3 & 1-4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\begin{matrix} \uparrow & \uparrow \\ x & y \end{matrix}$

$\text{rang}(B - 4I) = 1 \Rightarrow \dim(E_4) = 2 - 1 = 1$

système associé: $x - y = 0 \Leftrightarrow x = y \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \text{ avec } t \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow E_4 = \text{Vect} \{ (1, 1) \}$

Vérification: $\begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5-1 \\ 3+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix} = 4 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

3. Trouver les espaces propres de $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -2 \\ -5 & 3 & 2 \\ -2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$

polynôme caractéristique:

$$p_c(\lambda) = \det \begin{bmatrix} 4-\lambda & 2 & -2 \\ -5 & 3-\lambda & 2 \\ -2 & 4 & 1-\lambda \end{bmatrix} = \dots = (5-\lambda)(\lambda-1)(\lambda-2)$$

valeurs propres: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 5$

Comme $m_1 = 1$, $m_2 = 1$ et $m_5 = 1$ on s'attend à trouver

$$\dim(E_1) = 1, \dim(E_2) = 1 \text{ et } \dim(E_5) = 1$$

$$\underline{\lambda_1 = 1!}$$

$$A - 1I = \begin{bmatrix} 4-1 & 2 & -2 \\ -5 & 3-1 & 2 \\ -2 & 4 & 1-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -5 & 2 & 2 \\ -2 & 4 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow -\frac{1}{2}L_3} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -5 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{L_2 \rightarrow L_2 + 5L_1 \\ L_3 \rightarrow L_3 - 3L_1}} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & -8 & 2 \\ 0 & 8 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_3 \rightarrow L_3 + L_2} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & -8 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 \rightarrow -\frac{1}{8}L_2} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 \rightarrow L_1 + 2L_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\begin{matrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ x & y & z \end{matrix}$

$$\text{rang}(A - I) = 2 \Rightarrow \dim(E_1) = 3 - 2 = 1$$

système associé:

$$\begin{cases} x - \frac{1}{2}z = 0 \\ y - \frac{1}{4}z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2}z \\ y = \frac{1}{4}z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}, \text{ avec } t \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow E_1 = \text{Vect}\{(2, 1, 4)\}$$

Vérification: $\begin{bmatrix} 4 & 2 & -2 \\ -5 & 3 & 2 \\ -2 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8+2-8 \\ -10+3+8 \\ -4+4+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} = 1 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$

Remarque. Il est possible ici de faire des opérations élémentaires sur les lignes de sorte à éviter les fractions:

$$A - I \sim \dots \sim \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & -8 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 \rightarrow \frac{1}{2}L_2} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\begin{matrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ x & y & z \end{matrix}$

système associé:

$$\begin{cases} x - 2y = 0 \\ -4y + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y \\ z = 4y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}, \text{ avec } t \in \mathbb{R}$$

et l'on retrouve la même solution générale.

$$\underline{\lambda_2 = 2!}$$

$$\begin{aligned}
 A - 2I &= \begin{bmatrix} 4-2 & 2 & -2 \\ -5 & 3-2 & 2 \\ -2 & 4 & 1-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ -5 & 1 & 2 \\ -2 & 4 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 \rightarrow \frac{1}{2}L_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -5 & 1 & 2 \\ -2 & 4 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{L_2 \rightarrow L_2 + 5L_1 \\ L_3 \rightarrow L_3 + 2L_1}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 6 & -3 \\ 0 & 6 & -3 \end{bmatrix} \\
 &\xrightarrow{L_3 \rightarrow L_3 - L_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 6 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 \rightarrow \frac{1}{6}L_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 \rightarrow L_1 - L_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

$\begin{matrix} \uparrow x \\ \uparrow y \\ \uparrow z \end{matrix}$

$$\text{rang}(A - 2I) = 2 \Rightarrow \dim(E_2) = 3 - 2 = 1$$

système associé:

$$\begin{cases} x - \frac{1}{2}z = 0 \\ y - \frac{1}{2}z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2}z \\ y = \frac{1}{2}z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \text{ avec } t \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow E_2 = \text{Vect}\{(1, 1, 2)\}$$

Vérification:
$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & -2 \\ -5 & 3 & 2 \\ -2 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 + 2 - 4 \\ -5 + 3 + 4 \\ -2 + 4 + 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\lambda_3 = 5!}$$

$$A - 5I = \begin{bmatrix} 4-5 & 2 & -2 \\ -5 & 3-5 & 2 \\ -2 & 4 & 1-5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -2 \\ -5 & -2 & 2 \\ -2 & 4 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 \rightarrow -L_1} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -5 & -2 & 2 \\ -2 & 4 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{L_2 \rightarrow L_2 + 5L_1 \\ L_3 \rightarrow L_3 + 2L_1}} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & -12 & 12 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_2 \rightarrow -\frac{1}{12}L_2} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 \rightarrow L_1 + 2L_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\uparrow x$ $\uparrow y$ $\uparrow z$

$$\text{rang}(A - 5I) = 2 \Rightarrow \dim(E_5) = 3 - 2 = 1$$

système associé:

$$\begin{cases} x - z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \text{ avec } t \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow E_5 = \text{Vect}\{(0, 1, 1)\}$$

Vérification: $\begin{bmatrix} 4 & 2 & -2 \\ -5 & 3 & 2 \\ -2 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0+2-2 \\ 0+3+2 \\ 0+4+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 5 \end{bmatrix} = 5 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$