

Exemples.

1. Déterminer le noyau et l'image de l'application linéaire $T: \mathbb{P}_2 \rightarrow \mathbb{P}_2$ définie par $T(p) = p'$ (dérivée)

Par définition, $\text{Ker}(T) = \{ p \in \mathbb{P}_2 : T(p) = 0 \} = \{ p \in \mathbb{P}_2 : p' = 0 \}$

On s'attend à trouver $\text{Ker}(T) = \mathbb{P}_0$.

D'autre part, $\text{Im}(T) = \{ q \in \mathbb{P}_2 : \text{il existe } p \in \mathbb{P}_2 \text{ tel que } p' = q \}$

On s'attend à trouver $\text{Im}(T) = \mathbb{P}_1$.

Rappel. La matrice de $T(p) = p'$ par rapport à la base canonique

$\mathcal{E} = \{1, x, x^2\}$ de $\mathbb{P}_2$ est

$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$\text{On a } \text{rang}(A) = 2 \Rightarrow \begin{cases} \dim(\text{Ker}(T)) = 3 - 2 = 1 \\ \dim(\text{Im}(T)) = 2 \end{cases}$$

Système homogène associé à A :

$$\begin{cases} x_2 = 0 \\ 2x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ avec } t \in \mathbb{R}$$

$$\text{Ainsi, } \text{Nul}(A) = \text{Vect} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

Comme $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = [1]_{\mathcal{E}}$, nous trouvons

$$\text{Ker}(T) = \text{Vect}\{1\} = \mathbb{P}_0$$

$$\text{D'autre part, on a } \text{Col}(A) = \text{Vect} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \text{ ou } \text{Col}(A) = \text{Vect} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

Comme $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = [1]_{\mathcal{E}}$ et $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = [x]_{\mathcal{E}}$, nous trouvons

$$\text{Im}(T) = \text{Vect}\{1, x\} = \mathbb{P}_1$$

2. Déterminer le noyau et l'image de l'application linéaire trace

$\text{Tr}: M_{2,2}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\boxed{\text{Tr}\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = a + d}$

Rappel. La matrice de Tr par rapport aux bases canoniques de $M_{2,2}(\mathbb{R})$ et $\mathbb{R}$ est

$$\boxed{A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}$$

$\uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow$
 $x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4$

$$\text{On a } \text{rang}(A) = 1 \Rightarrow \begin{cases} \dim(\text{Ker}(\text{Tr})) = 4 - 1 = 3 \\ \dim(\text{Im}(\text{Tr})) = 1 \end{cases}$$

Système homogène associé à A :

$$x_1 + x_4 = 0 \Leftrightarrow x_1 = -x_4 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -u \\ x_2 = s \\ x_3 = t \\ x_4 = u \end{cases}, \text{ avec } s, t, u \in \mathbb{R}$$

solution générale:
$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + u \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \text{ avec } s, t, u \in \mathbb{R}$$

Ainsi, $\text{Nul}(A) = \text{Vect} \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

On a $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \left[\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \right]_{\mathcal{E}}$ car $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

De même on trouve $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \left[\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right]_{\mathcal{E}}$ et $\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \left[\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right]_{\mathcal{E}}$

Par conséquent,

$$\text{Ker}(\text{Tr}) = \text{Vect} \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

D'autre part, comme $\dim(\text{Im}(\text{Tr})) = 1 = \dim(\mathbb{R})$, on a $\text{Im}(\text{Tr}) = \mathbb{R}$

Changement de base.

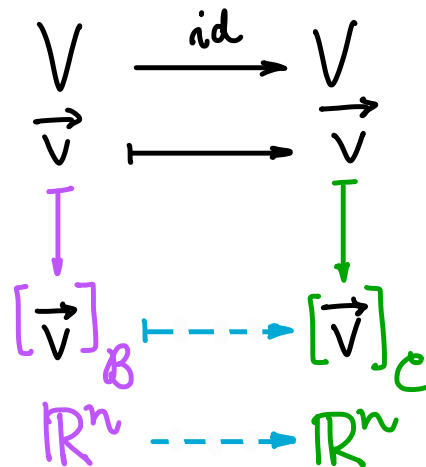
Soit V un espace vectoriel de dimension $n > 0$.

Soient $B = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_n\}$ et $C = \{\vec{c}_1, \vec{c}_2, \dots, \vec{c}_n\}$

deux bases de V .

Soit $\text{id}: V \rightarrow V$ l'application identité $\text{id}(\vec{v}) = \vec{v}$ pour tout $\vec{v} \in V$

Nous avons le schéma suivant:



L'application linéaire $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ qui envoie $[\vec{v}]_B$ vers $[\vec{v}]_C$ est la multiplication par la matrice A_{id}^{CB} . On note cette matrice P^{CB} et on l'appelle matrice de passage de la base B vers la base C .

Par construction,

$$P^{CB} = A_{id}^{CB} = \left[[\vec{b}_1]_C \quad [\vec{b}_2]_C \quad \dots \quad [\vec{b}_n]_C \right]$$

et

$$[\vec{v}]_C = P^{CB} [\vec{v}]_B$$

Exemple.

Sont $B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ et $C = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ deux bases de $\mathbb{R}^2$.

Nous avons :

$$\left. \begin{array}{l} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{array} \right\} \Rightarrow P^{CB} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$
$$\left. \begin{array}{l} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = (-1) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + (-1) \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \end{array} \right\} \Rightarrow P^{BC} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Propriété importante.

Si $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ sont deux bases de l'espace vectoriel V alors :

$$P^{\mathcal{B}\mathcal{C}} = (P^{\mathcal{C}\mathcal{B}})^{-1}$$

Conséquence.

Nous pouvons obtenir $P^{\mathcal{B}\mathcal{C}}$ à l'aide de l'algorithme :

$$[P^{\mathcal{C}\mathcal{B}} \mid I_n] \sim [I_n \mid P^{\mathcal{B}\mathcal{C}}]$$

Reprenons les bases de l'exemple précédent. On a :

$$\begin{aligned} [P^{\mathcal{C}\mathcal{B}} \mid I_2] &= \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{L_2 \rightarrow L_2 - L_1} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{L_1 \rightarrow L_1 + 2L_2} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{array} \right] \\ &\xrightarrow{L_2 \rightarrow -L_2} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{array} \right] = [I_2 \mid P^{\mathcal{B}\mathcal{C}}] \end{aligned}$$

Remarque.

Lorsque $V = \mathbb{R}^n$, on a $\vec{b}_1 = \beta_1 \vec{e}_1 + \dots + \beta_n \vec{e}_n = [\vec{e}_1 \dots \vec{e}_n] [\vec{b}_1]_c$

et on peut obtenir $[\vec{b}_1]_c$ en réduisant la matrice augmentée

$$[\vec{e}_1 \ \vec{e}_2 \ \dots \ \vec{e}_n \mid \vec{b}_1] \sim [I_n \mid [\vec{b}_1]_c]$$

Par conséquent, une manière alternative pour obtenir P^{CB}

dans le cas $V = \mathbb{R}^n$ consiste à réduire la matrice :

$$[\vec{e}_1 \ \vec{e}_2 \ \dots \ \vec{e}_n \mid \vec{b}_1 \ \vec{b}_2 \ \dots \ \vec{b}_n] \sim [I_n \mid P^{CB}]$$

On remarque que si la base d'arrivée est la base

canonique $\mathcal{E} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$ on a tout de suite :

$$P^{EB} = [\vec{b}_1 \ \vec{b}_2 \ \dots \ \vec{b}_n]$$

Propriétés.

Si $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ sont trois bases de l'espace vectoriel V alors la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ vers la base $\mathcal{D}$ peut se calculer comme suit:

$$\boxed{P^{\mathcal{D}\mathcal{B}} = P^{\mathcal{D}\mathcal{C}} P^{\mathcal{C}\mathcal{B}}} \quad \left(\begin{array}{l} \text{multiplication} \\ \text{matricielle} \end{array} \right)$$

$$\text{ou } P^{\mathcal{D}\mathcal{B}} = (P^{\mathcal{C}\mathcal{D}})^{-1} P^{\mathcal{C}\mathcal{B}}$$

$$\text{ou } P^{\mathcal{D}\mathcal{B}} = P^{\mathcal{D}\mathcal{C}} (P^{\mathcal{B}\mathcal{C}})^{-1}$$

Les formules précédentes nous donnent une manière alternative pour calculer $P^{\mathcal{C}\mathcal{B}}$: $P^{\mathcal{C}\mathcal{B}} = (P^{\mathcal{E}\mathcal{C}})^{-1} P^{\mathcal{E}\mathcal{B}}$, où comme avant $\mathcal{E}$ est la base canonique de V .

Question.

Quel est l'effet du changement de base sur les applications linéaires ?

Proposition. Soit $T: V \rightarrow V$ une application linéaire.

Soient $\mathcal{B} = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_n\}$ et $\mathcal{C} = \{\vec{c}_1, \vec{c}_2, \dots, \vec{c}_n\}$

deux bases de V . Alors :

$$A_T^{\mathcal{C}} = P^{\mathcal{C}\mathcal{B}} A_T^{\mathcal{B}} P^{\mathcal{B}\mathcal{C}}$$

Formulations équivalentes:

$$A_T^{\mathcal{C}} = P^{\mathcal{C}\mathcal{B}} A_T^{\mathcal{B}} (P^{\mathcal{C}\mathcal{B}})^{-1}$$

$$A_T^{\mathcal{C}} = (P^{\mathcal{B}\mathcal{C}})^{-1} A_T^{\mathcal{B}} P^{\mathcal{B}\mathcal{C}}$$

Preuve. Nous avons le schéma suivant :

$$\begin{array}{ccc}
 V & \xrightarrow{\quad} & V \\
 \vec{v} & \longmapsto & T(\vec{v}) \\
 \\
 \mathbb{R}^n & \xrightarrow{\quad} & \mathbb{R}^n \\
 \text{base } B: & [\vec{v}]_B \xrightarrow{A_T^B} A_T^B [\vec{v}]_B & \\
 & \uparrow P^{BC} & \downarrow P^{CB} \\
 & [\vec{v}]_C \xrightarrow{A_T^C} A_T^C [\vec{v}]_C & \\
 \text{base } C: & \mathbb{R}^n \xrightarrow{\quad} \mathbb{R}^n &
 \end{array}$$



Remarque.

Cette proposition nous donne une manière alternative de calculer

$$A_T^C = \left[[T(\vec{c}_1)]_C \quad [T(\vec{c}_2)]_C \quad \cdots \quad [T(\vec{c}_n)]_C \right]$$

lorsque $A_T^B = \left[[T(\vec{b}_1)]_B \quad [T(\vec{b}_2)]_B \quad \cdots \quad [T(\vec{b}_n)]_B \right]$ et P^{CB} (ou P^{BC})

sont connues.

Définition.

Soient A et A' deux matrices carrées de taille $n \times n$.

On dit que les matrices A et A' sont **semblables** s'il existe une matrice inversible P telle que

$$A' = P A P^{-1}$$

Exemple important.

Les matrices A_T^C et A_T^B sont semblables car on a

$$A_T^C = P A_T^B P^{-1} \quad \text{avec} \quad P = P^{CB}$$