

Noyau et image d'une application linéaire.

Définition.

Soient V et W deux espaces vectoriels et soit $T: V \rightarrow W$ une application linéaire.

a) Le **noyau** de T , noté $\text{Ker}(T)$ est le sous-ensemble de V défini par

$$\text{Ker}(T) = \{ \vec{v} \in V : T(\vec{v}) = \vec{0}_W \} \subset V$$

b) L'**image** de T , notée $\text{Im}(T)$ est le sous-ensemble de W défini par

$$\text{Im}(T) = \{ \vec{w} \in W : \text{il existe } \vec{v} \in V \text{ tel que } T(\vec{v}) = \vec{w} \} \subset W$$

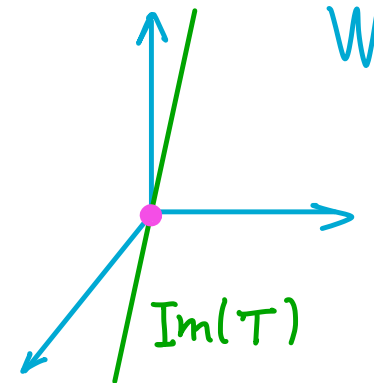
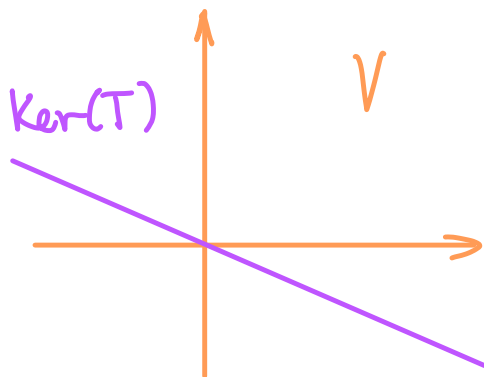
Nous avons le schéma suivant :

$$V \xrightarrow{T} W$$

$$\text{Ker}(T) \longrightarrow \{\vec{0}_W\}$$

$$V \longrightarrow \text{Im}(T)$$

Illustration:



Théorème $\text{Ker}(T)$ est un sous-espace vectoriel de V .

Preuve.

On commence par remarquer que $\vec{0}_V \in \text{Ker}(T)$ car $T(\vec{0}_V) = \vec{0}$

Soient $\vec{u}, \vec{v} \in \text{Ker}(T)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$

A voir : $\vec{u} + \vec{v}, \lambda \vec{u} \in \text{Ker}(T)$

Par hypothèse, $T(\vec{u}) = \vec{0}$ et $T(\vec{v}) = \vec{0}$

On a $T(\vec{u} + \vec{v}) \stackrel{\text{linéarité}}{=} T(\vec{u}) + T(\vec{v}) = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0} \Rightarrow \vec{u} + \vec{v} \in \text{Ker}(T)$

$T(\lambda \vec{u}) \stackrel{\text{linéarité}}{=} \lambda T(\vec{u}) = \lambda \vec{0} = \vec{0} \Rightarrow \lambda \vec{u} \in \text{Ker}(T)$ ■

Théorème. $\text{Im}(T)$ est un sous-espace vectoriel de W .

Preuve.

On commence par remarquer que $\vec{0}_W \in \text{Im}(T)$ car $\vec{0}_V \in V$ est tel que $T(\vec{0}_V) = \vec{0}_W$.

Soient $\vec{w}_1, \vec{w}_2 \in \text{Im}(T)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$

A voir : $\vec{w}_1 + \vec{w}_2, \lambda \vec{w}_1 \in \text{Im}(T)$

Par hypothèse, il existe $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in V$ tels que $\vec{w}_1 = T(\vec{v}_1)$ et $\vec{w}_2 = T(\vec{v}_2)$

On a $\vec{w}_1 + \vec{w}_2 = T(\vec{v}_1) + T(\vec{v}_2) = T(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) \Rightarrow \vec{w}_1 + \vec{w}_2 \in \text{Im}(T)$

$$\lambda \vec{w}_1 = \lambda T(\vec{v}_1) \stackrel{\text{linéarité}}{=} T(\lambda \vec{v}_1) \Rightarrow \lambda \vec{w}_1 \in \text{Im}(T) \quad \blacksquare$$

Remarques.

1. Nous avons $\vec{0}_V \in \text{Ker}(T)$ et $\vec{0}_W \in \text{Im}(T)$
2. Pour caractériser $\text{Ker}(T)$ et $\text{Im}(T)$ complètement, il suffit de donner leur dimension et une base.

De plus, $\dim(\text{Ker}(T)) \leq \dim(V)$

et $\dim(\text{Im}(T)) \leq \dim(W)$

Exemples.

1. Application nulle:

Soit $T: V \rightarrow W$ définie par $T(\vec{v}) = \vec{0}$ pour tout $\vec{v} \in V$

On a $\text{Ker}(T) = V$ et $\text{Im}(T) = \{\vec{0}\}$

2. Application identité:

Soit $T: V \rightarrow V$ définie par $T(\vec{v}) = \vec{v}$ pour tout $\vec{v} \in V$

On a $\text{Ker}(T) = \{\vec{0}\}$ et $\text{Im}(T) = V$

3. Soit $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ pour tout $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$

On a $\text{Im}(T) = \mathbb{R}^2$

et $\text{Ker}(T) = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 : z \in \mathbb{R} \right\}$

$\Rightarrow \text{Ker}(T) = \text{Vect}\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ ($\dim(\text{Ker}(T)) = 1$)

Noyau et image d'une application linéaire $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ associée à une matrice.

Soit A une matrice de taille $m \times n$ et $T_A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ l'application linéaire associée.

$$\text{Par définition, } \vec{v} \in \text{Ker}(T_A) \Leftrightarrow T_A(\vec{v}) = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow A\vec{v} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \vec{v} \in \text{Nul}(A) \quad \left(\begin{array}{l} \text{sous-espace vectoriel} \\ \text{des solutions du} \\ \text{système homogène } A\vec{v} = \vec{0} \end{array} \right)$$

Ainsi,

$$\boxed{\text{Ker}(T_A) = \text{Nul}(A)}$$

Nous avons vu que $\dim(\text{Nul}(A)) = n - \text{rang}(A)$

$$\left(\begin{array}{l} = \text{nb. d'inconnues} - \text{nb. de pivots} \\ = \text{nb. de variables libres} \end{array} \right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\dim(\text{Ker}(T_A)) = n - \text{rang}(A)}$$

$$\begin{aligned}
\text{D'autre part, } \vec{w} \in \text{Im}(T_A) &\Leftrightarrow \text{il existe } \vec{v} \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } T_A(\vec{v}) = \vec{w} \\
&\Leftrightarrow \text{il existe } \vec{v} \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } A\vec{v} = \vec{w} \\
&\Leftrightarrow \text{il existe } \vec{v} \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } v_1 \vec{a}_1 + \dots + v_n \vec{a}_n = \vec{w} \\
&\Leftrightarrow \vec{w} \in \text{Col}(A)
\end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{\text{Im}(T_A) = \text{Col}(A)}$

Nous avons vu que $\dim(\text{Col}(A)) = \text{rang}(A)$.

$$\Rightarrow \boxed{\dim(\text{Im}(T_A)) = \text{rang}(A)}$$

Conséquence.

$$\boxed{\dim(\text{Ker}(T_A)) + \dim(\text{Im}(T_A)) = n}$$

Exemples.

1. Déterminer le noyau et l'image de l'application linéaire associée à la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{L_2 \rightarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \rightarrow L_3 - L_1}]{\quad} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{L_3 \rightarrow L_3 + L_2}]{L_1 \rightarrow L_1 + L_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 \rightarrow -\frac{1}{2}L_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = R$$

$\begin{matrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ x & y & z \end{matrix}$

$$\text{rang}(A) = 2 \Rightarrow \begin{cases} \dim(\text{Ker}(T_A)) = 3 - 2 \\ \dim(\text{Im}(T_A)) = 2 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} \dim(\text{Ker}(T_A)) = 1 \\ \dim(\text{Im}(T_A)) = 2 \end{cases}}$$

Système homogène associé à R :

$$\begin{cases} x + z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -z \\ y = -z \end{cases} \begin{pmatrix} 2 \text{ variables principales} \\ 1 \text{ variable libre} \end{pmatrix}$$

solution générale : $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$, avec $t \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow \boxed{\text{Ker}(T_A) = \text{Vect} \left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}} \text{ ou } \boxed{\text{Ker}(T_A) = \text{Vect} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}}$$

Comme $\dim(\text{Im}(T_A)) = 2$, il faut choisir deux colonnes de A linéairement indépendantes pour avoir une base de $\text{Im}(T_A) = \text{Col}(A)$. Par exemple,

$$\text{Im}(T_A) = \text{Vect} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix} \right\}$$

$$\text{Im}(T_A) = \text{Vect} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix} \right\}$$

$$\text{Im}(T_A) = \text{Vect} \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix} \right\}$$

Remarque 1. Nous pouvons remplacer $\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$ par $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ ci-dessus.

Remarque 2. Nous avons ici

$$\text{Col}(R) = \text{Vect} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \quad \text{et} \quad \text{Col}(A) \neq \text{Vect} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

Remarque 3. Si l'on prend les colonnes de A associées aux pivots de R , nous avons des vecteurs linéairement indépendants et donc un choix de base.

2. Déterminer le noyau et l'image de l'application linéaire associée à la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & -1 & -3 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & -3 & 2 & 7 \end{bmatrix} \sim \dots \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = R \text{ (série 8, exercice 3)}$$

$\uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow$
 $x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4 \quad x_5$

$$\text{rang}(A) = 3 \Rightarrow \begin{cases} \dim(\ker(T_A)) = 5 - 3 \\ \dim(\text{Im}(T_A)) = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dim(\ker(T_A)) = 2 \\ \dim(\text{Im}(T_A)) = 3 \end{cases}$$

Comme $\dim(\text{Im}(T_A)) = 3$ et $\text{Im}(T_A) \subset \mathbb{R}^3$ on a $\text{Im}(T_A) = \mathbb{R}^3$

Système homogène associé à R :

$$\begin{cases} x_1 - x_3 + x_5 = 0 \\ x_2 + x_3 - x_5 = 0 \\ x_4 + 2x_5 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_3 - x_5 \\ x_2 = -x_3 + x_5 \\ x_4 = -2x_5 \end{cases}$$

Solution générale :

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \text{ avec } s, t \in \mathbb{R} \Rightarrow \ker(T_A) = \text{Vect} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Noyau et image d'une application linéaire $T: V \rightarrow W$ quelconque.

Soit $\mathcal{B} = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_n\}$ une base de V ($\dim V = n$)

Soit $\mathcal{B}' = \{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \dots, \vec{w}_m\}$ une base de W ($\dim W = m$)

Soit $A = A_T^{\mathcal{B}'\mathcal{B}}$ la matrice de T par rapport aux bases $\mathcal{B}$ de V et $\mathcal{B}'$ de W .

Nous avons l'équivalence :

$$\left. \begin{array}{l} T(\vec{v}) = \vec{w} \\ \text{avec } \vec{v} \in V \text{ et } \vec{w} \in W \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} A \overset{\text{produit matriciel}}{[\vec{v}]}_{\mathcal{B}} = [\vec{w}]_{\mathcal{B}'} \\ \text{avec } [\vec{v}]_{\mathcal{B}} \in \mathbb{R}^n \text{ et } [\vec{w}]_{\mathcal{B}'} \in \mathbb{R}^m \end{array} \right.$$

$$\text{d'où } \vec{v} \in \text{Ker}(T) \subset V \Leftrightarrow T(\vec{v}) = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow A[\vec{v}]_{\mathcal{B}} = [\vec{0}]_{\mathcal{B}'},$$

$$\Leftrightarrow [\vec{v}]_{\mathcal{B}} \in \text{Nul}(A) \subset \mathbb{R}^n$$

$$\vec{w} \in \text{Im}(T) \subset W \Leftrightarrow \text{il existe } \vec{v} \in V \text{ tel que } T(\vec{v}) = \vec{w}$$

$$\Leftrightarrow \text{il existe } [\vec{v}]_{\mathcal{B}} \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } A[\vec{v}]_{\mathcal{B}} = [\vec{w}]_{\mathcal{B}'},$$

$$\Leftrightarrow [\vec{w}]_{\mathcal{B}'} \in \text{Col}(A) \subset \mathbb{R}^m$$

En résumé,

$$\vec{v} \in \text{Ker}(T) \subset V \Leftrightarrow [\vec{v}]_{\mathcal{B}} \in \text{Nul}(A) \subset \mathbb{R}^n$$

$$\vec{w} \in \text{Im}(T) \subset W \Leftrightarrow [\vec{w}]_{\mathcal{B}'} \in \text{Col}(A) \subset \mathbb{R}^m$$

Conséquence.

$$\dim(\text{Ker}(T)) = \dim(\text{Nul}(A))$$

$$\dim(\text{Im}(T)) = \dim(\text{Col}(A))$$

Définition. Soit $T: V \rightarrow W$ une application linéaire.

On définit le rang de T , noté $\text{rang}(T)$ par

$$\text{rang}(T) = \dim(\text{Im}(T))$$

Remarque. On peut montrer que

$$\text{rang}(T) = \text{rang}(A_T^{\mathcal{B}'\mathcal{B}})$$

pour tout choix de base $\mathcal{B}$ de V et $\mathcal{B}'$ de W .

Théorème. (Théorème du rang)

Soit $T: V \rightarrow W$ une application linéaire. On a :

$$\begin{aligned}\dim V &= \dim(\text{Ker}(T)) + \dim(\text{Im}(T)) \\ &= \dim(\text{Ker}(T)) + \text{rang}(T)\end{aligned}$$

Preuve.

Soient $\mathcal{B}$ une base de V et $\mathcal{B}'$ une base de W .

Soit $A = A_T^{\mathcal{B}'\mathcal{B}}$ la matrice de T par rapport aux bases $\mathcal{B}$ de V et $\mathcal{B}'$ de W .

Soit $A\vec{x} = \vec{0}$ le système homogène associé.

Nous avons vu que :

$$(\text{nb. de variables libres}) = (\text{nb. d'inconnues}) - (\text{nb. de pivots})$$

$$\dim(\text{Nul}(A)) = n - \dim(\text{Col}(A))$$

$$\dim(\text{Ker}(T)) = \dim V - \dim(\text{Im}(T))$$

d'où le résultat. ■