

Applications linéaires.

Définition. Soient V, W deux espaces vectoriels.

Soit $T: V \rightarrow W$ une transformation. On dit que T est une application linéaire (ou transformation linéaire) si

1. $T(\vec{u} + \vec{v}) = T(\vec{u}) + T(\vec{v})$ pour tout $\vec{u}, \vec{v} \in V$

l'image de la somme de deux vecteurs
est la somme des images des deux vecteurs

2. $T(\lambda \vec{u}) = \lambda T(\vec{u})$ pour tout $\vec{u} \in V$ et $\lambda \in \mathbb{R}$

l'image du multiple d'un vecteur
est le multiple de l'image du vecteur

Exemples.

1. $T: \mathbb{P}_3 \rightarrow \mathbb{P}_2$ est linéaire (dérivée)
 $p \mapsto p'$

$$\text{En effet, } T(p+q) = (p+q)' = p' + q' = T(p) + T(q)$$

$$T(\lambda p) = (\lambda p)' = \lambda p' = \lambda T(p)$$

2. $T: \mathbb{P}_3 \rightarrow \mathbb{R}$ est linéaire.
 $p \mapsto \int_0^1 p(x) dx$

$$\begin{aligned} \text{En effet, } T(p+q) &= \int_0^1 (p+q)(x) dx = \int_0^1 (p(x) + q(x)) dx \\ &= \int_0^1 p(x) dx + \int_0^1 q(x) dx = T(p) + T(q) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T(\lambda p) &= \int_0^1 (\lambda p)(x) dx = \int_0^1 \lambda p(x) dx = \lambda \int_0^1 p(x) dx \\ &= \lambda T(p) \end{aligned}$$

Proposition.

Si $T: V \rightarrow W$ est une application linéaire alors $T(\vec{0}_V) = \vec{0}_W$.

Preuve.

Nous avons : $T(\vec{0}_V) = T(0 \vec{u}) \stackrel{2.}{=} 0 T(\vec{u}) = \vec{0}_W$ ■

Remarque.

La contra-réciproque de cette affirmation s'écrit :

"Si $T(\vec{0}_V) \neq \vec{0}_W$ alors $T: V \rightarrow W$ n'est pas une application linéaire"

et donne un critère simple pour décider si une transformation n'est pas une application linéaire.

Attention: Si $T(\vec{0}_V) = \vec{0}_W$, alors T n'est pas forcément linéaire.

Conséquences de la définition.

Soit $T: V \rightarrow W$ une application linéaire. Alors:

a. $T(c\vec{u} + d\vec{v}) = cT(\vec{u}) + dT(\vec{v})$ pour tout $\vec{u}, \vec{v} \in V$ et $c, d \in \mathbb{R}$

b. Principe de superposition:

$$T(c_1\vec{u}_1 + c_2\vec{u}_2 + \dots + c_k\vec{u}_k) = c_1T(\vec{u}_1) + c_2T(\vec{u}_2) + \dots + c_kT(\vec{u}_k)$$

pour tout $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k \in V$ et $c_1, \dots, c_k \in \mathbb{R}$.

Preuve.

a. $T(c\vec{u} + d\vec{v}) \stackrel{1.}{=} T(c\vec{u}) + T(d\vec{v}) \stackrel{2.}{=} cT(\vec{u}) + dT(\vec{v})$

b. Il suffit d'écrire $c_1\vec{u}_1 + c_2\vec{u}_2 + \dots + c_k\vec{u}_k = c_1\vec{u}_1 + (c_2\vec{u}_2 + \dots + c_k\vec{u}_k)$
et utiliser la partie a (plusieurs fois). ■

Matrice associée à une application linéaire $T: V \rightarrow W$

Rappel.

Si $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ est une application linéaire, alors on peut lui associer la matrice de taille $m \times n$ dont les colonnes sont les images des n vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^n$:

$$A = [T(\vec{e}_1) \ T(\vec{e}_2) \ \dots \ T(\vec{e}_n)]$$

appelée *matrice canoniquement associée à T* .

Nous allons voir maintenant comment associer une matrice à une application linéaire $T: V \rightarrow W$ où V, W sont des espaces vectoriels quelconques.

Soit V un espace vectoriel de dimension $n > 0$.

Soit $B = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_n\}$ une base de V

Nous avons vu que tout vecteur $\vec{v} \in V$ s'écrit de manière unique :

$$\vec{v} = \alpha_1 \vec{b}_1 + \alpha_2 \vec{b}_2 + \dots + \alpha_n \vec{b}_n, \text{ avec } \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$$

et nous avons noté

$$[\vec{v}]_B = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

le vecteur de coordonnées de $\vec{v}$ dans la base B .

Proposition. L'application $\varphi: V \rightarrow \mathbb{R}^n$ est linéaire et bijective.

$$\vec{v} \mapsto [\vec{v}]_B$$

Preuve. A voir: $\varphi(\vec{u} + \vec{v}) = \vec{\varphi}(\vec{u}) + \vec{\varphi}(\vec{v})$ pour tout $\vec{u}, \vec{v} \in V$

$$\varphi(\lambda \vec{u}) = \lambda \varphi(\vec{u}) \text{ pour tout } \vec{u} \in V \text{ et } \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Supposons que } \vec{u} = \alpha_1 \vec{b}_1 + \dots + \alpha_n \vec{b}_n \\ \vec{v} = \beta_1 \vec{b}_1 + \dots + \beta_n \vec{b}_n \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{u} + \vec{v} = (\alpha_1 + \beta_1) \vec{b}_1 + \dots + (\alpha_n + \beta_n) \vec{b}_n$$

$$\text{d'où } \varphi(\vec{u} + \vec{v}) = \begin{bmatrix} \alpha_1 + \beta_1 \\ \vdots \\ \alpha_n + \beta_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix} = \vec{\varphi}(\vec{u}) + \vec{\varphi}(\vec{v}) \text{ pour tout } \vec{u}, \vec{v} \in V.$$

$$\text{Comme } \lambda \vec{u} = \lambda(\alpha_1 \vec{b}_1 + \dots + \alpha_n \vec{b}_n) = (\lambda \alpha_1) \vec{b}_1 + \dots + (\lambda \alpha_n) \vec{b}_n$$

$$\text{on a } \varphi(\lambda \vec{u}) = \begin{bmatrix} \lambda \alpha_1 \\ \vdots \\ \lambda \alpha_n \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = \lambda \varphi(\vec{u}) \text{ pour tout } \vec{u} \in V \text{ et } \lambda \in \mathbb{R}$$

L'application est bijective car l'écriture $\vec{v} = \alpha_1 \vec{b}_1 + \dots + \alpha_n \vec{b}_n$

est unique. ■

Soit W un espace vectoriel de dimension $m > 0$.

Soit $B' = \{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \dots, \vec{w}_m\}$ une base de W .

De même, l'application $\psi: W \rightarrow \mathbb{R}^m$ est linéaire et bijective.
 $\vec{w} \mapsto [\vec{w}]_{B'}$

Considérons maintenant une application linéaire $T: V \rightarrow W$

$$\begin{aligned} \text{Nous avons } T(\vec{v}) &= T(\alpha_1 \vec{b}_1 + \dots + \alpha_n \vec{b}_n) \\ &= T(\alpha_1 \vec{b}_1) + \dots + T(\alpha_n \vec{b}_n) && \text{par linéarité} \\ \Rightarrow \boxed{T(\vec{v}) = \alpha_1 T(\vec{b}_1) + \dots + \alpha_n T(\vec{b}_n)} && \text{par linéarité} \end{aligned}$$

Cette expression nous dit qu'il suffit de connaître les images des vecteurs de la base $B = \{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n\}$ pour connaître l'image de $\vec{v}$ par T , pour tout $\vec{v} \in V$.

Nous avons le schéma suivant:

$$\begin{array}{ccccc}
 \vec{v} \in V & \xrightarrow{T} & W & \ni & T(\vec{v}) \\
 \downarrow & & \downarrow \psi & & \downarrow \\
 [\vec{v}]_B \in \mathbb{R}^n & \xrightarrow{\quad} & \mathbb{R}^m & \ni & [T(\vec{v})]_{B'}
 \end{array}$$

Soit A la matrice de taille $m \times n$ telle que

$$[T(\vec{v})]_{B'} = A[\vec{v}]_B$$

Nous avons vu que les colonnes de A sont les images des vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

Comme par construction $\vec{b}_1 = 1\vec{b}_1 + 0\vec{b}_2 + \dots + 0\vec{b}_n$ on a $[\vec{b}_1]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \vec{e}_1$.

De même, $[\vec{b}_2]_{\mathcal{B}} = \vec{e}_2, \dots, [\vec{b}_n]_{\mathcal{B}} = \vec{e}_n$, d'où :

$$\begin{array}{ccc} \vec{b}_j & \xrightarrow{T} & T(\vec{b}_j) \\ \varphi \downarrow & & \downarrow \gamma \\ \vec{e}_j & \dashrightarrow & [T(\vec{b}_j)]_{\mathcal{B}'} \end{array}$$

L'image de $\vec{e}_j$ est donc $[T(\vec{b}_j)]_{\mathcal{B}'}$ pour $j=1, \dots, n$, d'où :

Définition.

Soit $T: V \rightarrow W$ une application linéaire.

Soit $\mathcal{B} = \{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n\}$ une base de V et $\mathcal{B}' = \{\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_m\}$ une base de W .

La matrice de taille $m \times n$ dont la j -ème colonne est le vecteur de coordonnées dans la base $\mathcal{B}'$ de l'image par T du j -ème vecteur de la base $\mathcal{B}$ est appelée *matrice associée à l'application linéaire T par rapport aux bases $\mathcal{B}$ de V et $\mathcal{B}'$ de W* , notée $A_T^{\mathcal{B}'\mathcal{B}}$:

$$A_T^{\mathcal{B}'\mathcal{B}} = \left[[T(\vec{b}_1)]_{\mathcal{B}'} \quad [T(\vec{b}_2)]_{\mathcal{B}'} \quad \dots \quad [T(\vec{b}_n)]_{\mathcal{B}'} \right]$$

Nous avons ainsi :

$$[T(\vec{v})]_{\mathcal{B}'} = A_T^{\mathcal{B}'\mathcal{B}} [\vec{v}]_{\mathcal{B}} \text{ pour tout } \vec{v} \in V.$$

Méthode pour calculer $A_T^{B'B}$.

- Calculer les images des n vecteurs de la base $B = \{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n\}$ de V :

$$T(\vec{b}_1), T(\vec{b}_2), \dots, T(\vec{b}_n)$$

- Exprimer ces n vecteurs comme combinaisons linéaires des m vecteurs de la base $B' = \{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \dots, \vec{w}_m\}$:

$$T(\vec{b}_1) = a_{11}\vec{w}_1 + a_{21}\vec{w}_2 + \dots + a_{m1}\vec{w}_m$$

$$\vdots$$

$$T(\vec{b}_n) = a_{1n}\vec{w}_1 + a_{2n}\vec{w}_2 + \dots + a_{mn}\vec{w}_m$$

La matrice $A_T^{\mathcal{B}'\mathcal{B}}$ a comme colonnes les vecteurs de coordonnées dans la base $\mathcal{B}'$ des vecteurs $T(\vec{b}_1), T(\vec{b}_2), \dots, T(\vec{b}_n)$:

$$A_T^{\mathcal{B}'\mathcal{B}} = \left[[T(\vec{b}_1)]_{\mathcal{B}'} \cdots [T(\vec{b}_n)]_{\mathcal{B}'} \right] = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Remarques.

- Si l'on prend les bases canoniques $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ de V et W , on va noter A_T la matrice associée plutôt que $A_T^{\mathcal{E}'\mathcal{E}}$ (pour simplifier la notation).
- Si les espaces vectoriels de départ et d'arrivée sont égaux : $V = W$, en général on va prendre la même base pour les deux espaces : $\mathcal{B} = \mathcal{B}$ et on va noter $A_T^{\mathcal{B}}$ la matrice associée plutôt que $A_T^{\mathcal{B}\mathcal{B}}$ (pour simplifier la notation).

Exemples.

1. Déterminer la matrice associée à l'application linéaire

$T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $T(x, y, z) = (x+y, x-z)$ par rapport

aux bases $\mathcal{B} = \{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)\}$ de $\mathbb{R}^3$ et $\mathcal{B}' = \{(1, 1), (1, 0)\}$

de $\mathbb{R}^2$. On a:

$$\left. \begin{aligned} T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) &= \begin{bmatrix} 1+1 \\ 1-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) &= \begin{bmatrix} 1+1 \\ 1-0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = 1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) &= \begin{bmatrix} 1+0 \\ 1-0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \Rightarrow A_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

2. Déterminer la matrice associée à l'application linéaire $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par $T(x, y, z) = (2x + 3y - 4z, 5x - 6y, 7x - 8z)$ par rapport :
 aux bases $\mathcal{B} = \{(1, 0, 0), (0, 1, 1), (0, 0, 1)\}$ de $\mathbb{R}^3$ (espace de départ)
 et $\mathcal{E} = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ de $\mathbb{R}^3$ (espace d'arrivée). On a :

$$\left. \begin{aligned} T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) &= \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 5 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 7 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) &= \begin{bmatrix} -1 \\ -6 \\ -8 \end{bmatrix} = (-1) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + (-6) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + (-8) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) &= \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ -8 \end{bmatrix} = (-4) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + (-8) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \Rightarrow A_T^{\mathcal{E}\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -4 \\ 5 & -6 & 0 \\ 7 & -8 & -8 \end{bmatrix}$$

3. Déterminer la matrice associée à l'application linéaire $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par $T(x, y, z) = (2x + 3y - 4z, 5x - 6y, 7x - 8z)$ par rapport à la base $\mathcal{B} = \{(1, 0, 0), (0, 1, 1), (0, 0, 1)\}$ de $\mathbb{R}^3$ (même base pour l'espace de départ et l'espace d'arrivée). On a:

$$\left. \begin{aligned} T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) &= \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 5 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) &= \begin{bmatrix} -1 \\ -6 \\ -8 \end{bmatrix} = (-1) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + (-6) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + (-2) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) &= \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ -8 \end{bmatrix} = (-4) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + (-8) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \Rightarrow A_{\mathcal{B}}^T = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -4 \\ 5 & -6 & 0 \\ 2 & -2 & -8 \end{bmatrix}$$

4. Déterminer la matrice associée à l'application linéaire $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par $T(x, y, z) = (y - z, 3x + 2y - 3z, 2x + 2y - 3z)$ par rapport à la base $\mathcal{B} = \{(1, 0, 0), (0, 1, 1), (0, 0, 1)\}$ de $\mathbb{R}^3$ (même base pour l'espace de départ et l'espace d'arrivée). On a:

$$\left. \begin{aligned} T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) &= \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} = 0 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + (-1) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) &= \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} = 0 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + (-1) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) &= \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ -3 \end{bmatrix} = (-1) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + (-3) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \Rightarrow A_{\mathcal{B}}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & -3 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

5. Déterminer la matrice associée à l'application linéaire $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par $T(x, y, z) = (y - z, 3x + 2y - 3z, 2x + 2y - 3z)$ par rapport à la base $\mathcal{B} = \{(1, -1, 0), (0, 1, 1), (1, 3, 2)\}$ de $\mathbb{R}^3$ (même base pour l'espace de départ et l'espace d'arrivée). On a:

$$\left. \begin{aligned} T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) &= \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = (-1) \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} \\ T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) &= \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} = 0 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + (-1) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} \\ T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}\right) &= \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} = 0 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \Rightarrow A_{\mathcal{B}}^T = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Nous remarquons que pour ce choix particulier de base, la matrice $A_{\mathcal{B}}^T$ est une matrice diagonale.

6. Déterminer la matrice associée à l'application linéaire $T: \mathbb{P}_2 \rightarrow \mathbb{P}_2$ définie par $T(p) = p'$ (dérivée) par rapport à la base canonique $\mathcal{E} = \{1, x, x^2\}$ de $\mathbb{P}_2$. On a:

$$T(1) = 1' = 0 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2$$

$$T(x) = x' = 1 = 1 \cdot 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2$$

$$T(x^2) = (x^2)' = 2x = 0 \cdot 1 + 2 \cdot x + 0 \cdot x^2$$

$$\left. \begin{array}{l} T(1) = 1' = 0 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 \\ T(x) = x' = 1 = 1 \cdot 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 \\ T(x^2) = (x^2)' = 2x = 0 \cdot 1 + 2 \cdot x + 0 \cdot x^2 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$A_T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{ccc} \nearrow & \uparrow & \nwarrow \\ [T(1)]_{\mathcal{E}} & [T(x)]_{\mathcal{E}} & [T(x^2)]_{\mathcal{E}} \end{array}$$

Remarque. Si $p(x) = a + bx + cx^2$ est un polynôme quelconque, les règles de dérivation nous donnent tout de suite :

$p'(x) = b + 2cx$. Nous avons donc :

$$T(a + bx + cx^2) = b + 2cx$$

La matrice A_T nous permet de retrouver le même résultat à l'aide d'une multiplication matricielle. En effet,

$$[p]_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \Rightarrow A_T [p]_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ 2c \\ 0 \end{bmatrix} = [p']_{\mathcal{E}}$$

d'où :

$$[p']_{\mathcal{E}} = A_T [p]_{\mathcal{E}}$$

7. Déterminer la matrice associée à l'application linéaire $T: \mathbb{P}_2 \rightarrow \mathbb{P}_2$ définie par $T(p) = p'$ par rapport à la base $\mathcal{B} = \{1, 1+x, 1+x+x^2\}$ de $\mathbb{P}_2$. On a:

$$\left. \begin{aligned} T(1) &= 1' = 0 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot (1+x) + 0 \cdot (1+x+x^2) \\ T(1+x) &= (1+x)' = 1 = 1 \cdot 1 + 0 \cdot (1+x) + 0 \cdot (1+x+x^2) \\ T(1+x+x^2) &= (1+x+x^2)' = 1+2x = (-1) \cdot 1 + 2 \cdot (1+x) + 0 \cdot (1+x+x^2) \end{aligned} \right\}$$

$$\Rightarrow A_{\mathcal{B}}^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

8. Soit $M_{2,2}(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices de taille 2×2 .

Déterminer la matrice de l'application linéaire $\text{Tr}: M_{2,2}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$

définie par $\text{Tr}\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = a + d$ (trace de la matrice),

par rapport aux bases canoniques de $M_{2,2}(\mathbb{R})$ et $\mathbb{R}$. On a:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Tr}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = 1 + 0 = 1 = 1 \cdot 1 \\ \text{Tr}\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = 0 + 0 = 0 = 0 \cdot 1 \\ \text{Tr}\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right) = 0 + 0 = 0 = 0 \cdot 1 \\ \text{Tr}\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = 0 + 1 = 1 = 1 \cdot 1 \end{array} \right\} \Rightarrow A_{\text{Tr}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$