

4.3. Le rang d'une matrice

Définition. Soit A une matrice de taille $m \times n$:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Les vecteurs

$$\vec{\ell}_1 = (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}), \vec{\ell}_2 = (a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n}), \dots, \vec{\ell}_m = (a_{m1}, a_{m2}, \dots, a_{mn})$$

sont les *vecteurs ligne* de la matrice A .

Le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ engendré par les m vecteurs ligne de la matrice A est appelé *sous-espace des lignes de A* , noté $\text{Lgn}(A)$:

$$\text{Lgn}(A) = \text{Vect}\{\vec{\ell}_1, \vec{\ell}_2, \dots, \vec{\ell}_m\} \subset \mathbb{R}^n$$

La dimension du sous-espace des lignes de A est appelée *rang de la matrice A* , noté $\text{rang}(A)$:

$$\text{rang}(A) = \dim(\text{Lgn}(A)).$$

Remarque. Comme $\text{Lgn}(A) = \text{Vect}\{\vec{\ell}_1, \vec{\ell}_2, \dots, \vec{\ell}_m\}$, nous avons $\text{rang}(A) \leq m$.

Comme $\text{Lgn}(A) \subset \mathbb{R}^n$, nous avons $\text{rang}(A) \leq n$. Par conséquent, nous avons

$$\text{rang}(A) \leq \min(m, n).$$

Exemple

Soit $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \in M_{2,3}(\mathbb{R})$. Nous avons $\vec{\ell}_1 = (1, 2, 3)$ et $\vec{\ell}_2 = (4, 5, 6)$. De plus,

$$\text{rang}(A) = 2$$

car les vecteurs $\vec{\ell}_1$ et $\vec{\ell}_2$ sont linéairement indépendants.

Proposition. Si A et C sont deux matrices équivalentes alors

$$\text{Lgn}(A) = \text{Lgn}(C).$$

Preuve. Comme $A \sim C$, les lignes de la matrice C peuvent être obtenues à partir de celles de la matrice A à l'aide des opérations élémentaires sur les lignes. Par conséquent, les lignes de C sont des combinaisons linéaires des lignes de A et de ce fait, elles se trouvent dans le sous-espace des lignes de A , ce qui implique

$$\text{Lgn}(C) \subset \text{Lgn}(A).$$

En inversant le rôle de A et C nous trouvons

$$\text{Lgn}(A) \subset \text{Lgn}(C),$$

ce qui nous donne l'égalité cherchée. ■

Conséquence: Si A et C sont deux matrices équivalentes alors

$$\text{rang}(A) = \text{rang}(C).$$

Remarque. Si R est une matrice échelonnée-réduite avec r lignes non-nulles :

$$R = \left[\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & * & \cdots & * \\ 0 & 1 & 0 & * & \cdots & * \\ 0 & 0 & 1 & * & \cdots & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{array} \right] \left. \vphantom{\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & * & \cdots & * \\ 0 & 1 & 0 & * & \cdots & * \\ 0 & 0 & 1 & * & \cdots & * \end{array}} \right\} r \text{ lignes non-nulles}$$

alors les r lignes non-nulles sont automatiquement linéairement indépendantes et de ce fait, forment une base du sous-espace des lignes de R . Il s'en suit que

$$\text{rang}(R) = r.$$

Conséquence. Soit A une matrice de taille $m \times n$ et soit R la matrice échelonnée-réduite associée à la matrice A . Nous avons

$$\text{Lgn}(A) = \text{Lgn}(R)$$

et il est pratique d'utiliser l'ensemble formé des r lignes non-nulles de R comme base de $\text{Lgn}(A)$.

De plus, pour calculer le rang d'une matrice quelconque A , il suffit de compter le nombre de lignes non-nulles de R (ou le nombre de lignes non-nulles de toute matrice échelonnée associée à A).

Exemple

Comme

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{L_2 \rightarrow L_2 + L_1 \\ L_3 \rightarrow L_3 - L_1}]{\quad} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{L_1 \rightarrow L_1 - L_2 \\ L_3 \rightarrow L_3 - L_2}]{\quad} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 \rightarrow \frac{1}{2}L_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = R,$$

nous trouvons

$$\text{rang}(A) = 2$$

et nous pouvons prendre $\{(1, 0, -3), (0, 1, 2)\}$ (ou $\{(1, 0, -3), (0, 2, 4)\}$) comme base de $\text{Lgn}(A)$.

Nous pouvons aussi choisir deux lignes de A linéairement indépendantes :

$$\{(1, 2, 1), (-1, 0, 3)\}, \{(1, 2, 1), (1, 4, 5)\} \text{ ou } \{(-1, 0, 3), (1, 4, 5)\}.$$

Comme tout vecteur de $\text{Lgn}(A)$ peut s'écrire sous la forme

$$\alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ 2\beta - 3\alpha \end{bmatrix}, \quad \text{avec } \alpha, \beta \in \mathbb{R},$$

nous avons un moyen simple de caractériser l'appartenance à $\text{Lgn}(A)$:

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} \in \text{Lgn}(A) \quad \Longleftrightarrow \quad v_3 = 2v_2 - 3v_1$$

Exemple

Soit $W = \text{Vect}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ où $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}$ et $\vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Calculer $\dim W$ et donner une base de W .

Soit A la matrice dont les *lignes* sont les vecteurs $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$. Nous avons donc

$$W = \text{Lgn}(A) \quad \text{et} \quad \dim W = \text{rang}(A).$$

L'échelonnement et la réduction de la matrice A nous donne :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -1 & 5 & 4 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 \rightarrow L_1 + L_2} \begin{bmatrix} 1 & 8 & 9 \\ -1 & 5 & 4 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \dots \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = R.$$

Comme $\text{rang}(A) = 2$ nous trouvons ainsi

$$\dim W = 2.$$

Nous avons donc plusieurs choix de base de W :

$$\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}, \quad \{\vec{v}_1, \vec{v}_3\}, \quad \{\vec{v}_2, \vec{v}_3\}, \quad \{(1, 0, 1), (0, 1, 1)\}.$$

Comme tout vecteur de $W = \text{Lgn}(A)$ peut s'écrire sous la forme

$$\alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \alpha + \beta \end{bmatrix}, \quad \text{avec } \alpha, \beta \in \mathbb{R},$$

nous avons un moyen simple de caractériser l'appartenance à W :

$$\vec{w} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} \in W \quad \Longleftrightarrow \quad w_3 = w_1 + w_2$$

Ainsi, nous vérifions immédiatement que

$$\begin{bmatrix} 2024 \\ 2025 \\ 4049 \end{bmatrix} \in W \quad (\text{car } 2024 + 2025 = 4049).$$

$$\begin{bmatrix} 123 \\ 456 \\ 789 \end{bmatrix} \notin W \quad (\text{car } 123 + 456 = 579 \neq 789).$$

Remarque. Le calcul est plus long en utilisant les bases $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$, $\{\vec{v}_1, \vec{v}_3\}$ et $\{\vec{v}_2, \vec{v}_3\}$.

Sous-espace des colonnes d'une matrice

Définition. Soit A une matrice de taille $m \times n$:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Les vecteurs

$$\vec{a}_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}, \vec{a}_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix}, \dots, \vec{a}_n = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}$$

sont les *vecteurs colonne* de la matrice A .

Le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^m$ engendré par les n vecteurs colonne de la matrice A est appelé *sous-espace des colonnes de A* , noté $\text{Col}(A)$:

$$\text{Col}(A) = \text{Vect}\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n\} \subset \mathbb{R}^m$$

Exemple

$$\text{Si } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \in M_{2,3}(\mathbb{R}), \text{ alors nous avons } \vec{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}, \vec{a}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}, \vec{a}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

Comme par définition

$$\begin{aligned}\vec{b} \in \text{Col}(A) &\iff \vec{b} = x_1 \vec{a}_1 + x_2 \vec{a}_2 + \dots + x_n \vec{a}_n, \quad \text{avec } x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R} \\ &\iff \vec{b} = A\vec{x}, \quad \text{avec } \vec{x} \in \mathbb{R}^n \\ &\iff \text{l'équation matricielle } A\vec{x} = \vec{b} \text{ est consistante}\end{aligned}$$

Par conséquent nous avons

$$\text{Col}(A) = \left\{ \vec{b} \in \mathbb{R}^m : \vec{b} = A\vec{x} \text{ pour un certain } \vec{x} \in \mathbb{R}^n \right\}.$$

Proposition. (sans démonstration)

La dimension du sous-espace des colonnes de A est égale à $\text{rang}(A)$:

$$\dim(\text{Col}(A)) = \text{rang}(A).$$

Corollaire. Soit $A^T \in M_{n,m}(\mathbb{R})$ la matrice transposée de $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$. Nous avons

$$\text{rang}(A^T) = \text{rang}(A).$$

Preuve. Il suffit de remarquer que le sous-espace des lignes de la matrice transposée A^T est le sous-espace des colonnes de A : $\text{Lgn}(A^T) = \text{Col}(A)$. ■

Exemple

Nous avons vu que

$$A = \begin{bmatrix} \vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \vec{a}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & 5 \end{bmatrix} \sim \cdots \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{r}_1 & \vec{r}_2 & \vec{r}_3 \end{bmatrix} = R.$$

Ainsi, $\dim \text{Col}(A) = \text{rang}(A) = 2$ et nous pouvons prendre

$$\{\vec{a}_1, \vec{a}_2\} \quad \text{ou} \quad \{\vec{a}_1, \vec{a}_3\} \quad \text{ou} \quad \{\vec{a}_2, \vec{a}_3\}$$

comme base de $\text{Col}(A)$. Par contre, nous ne pouvons pas prendre ici $\{\vec{r}_1, \vec{r}_2\}$ comme base de $\text{Col}(A)$ car la troisième composante des vecteurs $\vec{r}_1$ et $\vec{r}_2$ est nulle. Nous remarquons néanmoins que les colonnes de A et R ont la même relation de dépendance linéaire :

$$\vec{r}_3 = -3\vec{r}_1 + 2\vec{r}_2 \quad \text{et} \quad \vec{a}_3 = -3\vec{a}_1 + 2\vec{a}_2.$$

Soit A une matrice de taille $m \times n$ et soit R sa forme échelonnée-réduite.

Comme $\text{Col}(A) \subset \mathbb{R}^m$, nous avons

$$\text{rang}(A) = \dim(\text{Col}(A)) \leq m.$$

Nous distinguons deux cas :

- Si $\text{rang}(A) = m$, alors R a un pivot par ligne et dans ce cas,

$$\text{Col}(A) = \mathbb{R}^m$$

et nous pouvons prendre n'importe quelle base de $\mathbb{R}^m$ pour avoir une base de $\text{Col}(A)$. En particulier, nous pouvons prendre la base canonique de $\mathbb{R}^m$.

- Si $\text{rang}(A) = k < m$, alors R a seulement k pivots et contient $m - k$ lignes nulles.

Dans ce cas, nous avons $\text{Col}(A) \neq \text{Col}(R)$ en général (sauf si la matrice A possède les mêmes $m - k$ lignes nulles que R).

Comme $\dim(\text{Col}(A)) = k$, il suffit de choisir k colonnes linéairement indépendantes de A pour avoir une base de $\text{Col}(A)$. Par exemple, nous pouvons choisir les k colonnes de A correspondants aux k pivots de R . En effet, nous pouvons montrer que les colonnes de A et de R ont les mêmes relations de dépendance linéaire.

Considérons à nouveau le système d'équations linéaires à m équations et n inconnues :

$$\left\{ \begin{array}{ll} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 & (1) \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 & (2) \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \cdots + a_{3n}x_n = b_3 & (3) \\ \vdots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m & (m) \end{array} \right. \quad (*)$$

Nous avons vu que nous pouvons exprimer ce système sous forme matricielle :

$$A\vec{x} = \vec{b}$$

où $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$, $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ et $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$.

De plus, nous avons défini la matrice augmentée associée au système (*) :

$$[A \mid \vec{b}] = \left[\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} & b_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array} \right]$$

Les résultats obtenus au chapitre 1 peuvent se reformuler de la manière suivante :

Théorème.

1. Si $\text{rang}(A) < \text{rang}([A \mid \vec{b}])$ alors le système n'a pas de solution.
2. Si $\text{rang}(A) = \text{rang}([A \mid \vec{b}]) = n$ alors le système possède une solution unique.
3. Si $\text{rang}(A) = \text{rang}([A \mid \vec{b}]) < n$ alors le système possède une infinité de solutions.

Preuve. Nous avons vu que les opérations élémentaires sur les lignes ne changent ni le rang ni les solutions du système. Par conséquent, il suffit de considérer la matrice échelonnée-réduite associée au système :

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & * & \cdots & * & * \\ 0 & 1 & 0 & * & \cdots & * & * \\ 0 & 0 & 1 & * & \cdots & * & * \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & * \end{array} \right]$$

pour conclure. ■

Théorème du rang. Soit A une matrice de taille $m \times n$. Nous avons

$$\dim(\text{Nul}(A)) + \text{rang}(A) = n.$$

Preuve. Nous avons

$$(\text{nombre de variables libres}) + (\text{nombre de pivots}) = (\text{nombre d'inconnues})$$
■