Sous-espace vectoriel des solutions d'un système d'équations linéaires homogènes

Soit $A=[a_{jk}]$ une matrice de taille $m\times n$.

L'ensemble des solutions du système d'équations linéaires homogènes

$$\left\{\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n &=0 & \quad (1)\\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n &=0 & \quad (2)\\ &\vdots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n &=0 & \quad (m)\end{array}\right.$$

forme un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$, noté $\mathrm{Nul}(A)$:

$$\mathrm{Nul}(A)=\{\vec{x}\in\mathbb{R}^n : A\vec{x}=\vec{0}\}\subset\mathbb{R}^n.$$

En effet, nous commençons par remarquer que $(0,0,\ldots,0)\in\mathrm{Nul}(A)$.

Soient $\vec{x},\vec{y}\in\mathrm{Nul}(A)$ et $\lambda\in\mathbb{R}$. Nous avons :

$$\left.\begin{array}{r} A(\vec{x}+\vec{y}) = A\vec{x}+A\vec{y}=\vec{0}+\vec{0}=\vec{0}\\ A(\lambda\vec{x}) = \lambda A\vec{x}=\lambda\vec{0}=\vec{0}\end{array}\right\} \quad\Longrightarrow\quad \left\{\begin{array}{r}\vec{x}+\vec{y}\in\mathrm{Nul}(A)\\ \lambda\vec{x}\in\mathrm{Nul}(A)\end{array}\right.$$

Attention : Si $\vec{b}\neq\vec{0}$, alors les solutions du système inhomogène

$$A\vec{x}=\vec{b}$$

ne forment pas de sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ car $\vec{x}=\vec{0}$ n'est pas solution du système.

Sous-espace vectoriel engendré par un ensemble de vecteurs

Soit V un espace vectoriel. Soient $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ deux vecteurs de V. L'ensemble

$$W = \{\vec{v} \in V : \vec{v} = \alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2, \text{ avec } \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}\}$$

formé de toutes les combinaisons linéaires de $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ est un sous-espace vectoriel de V.

En effet, nous commençons par remarquer que $\vec{0} \in V$ est dans W car $\vec{0} = 0\vec{v}_1 + 0\vec{v}_2$.

Soient $\vec{v} = \alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2$ et $\vec{w} = \beta_1\vec{v}_1 + \beta_2\vec{v}_2$ deux éléments de W. Nous avons :

$$\begin{aligned}
\vec{v} + \vec{w} &= (\alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2) + (\beta_1\vec{v}_1 + \beta_2\vec{v}_2) = (\alpha_1 + \beta_1)\vec{v}_1 + (\alpha_2 + \beta_2)\vec{v}_2 \in W \\
\lambda\vec{v} &= \lambda(\alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2) = (\lambda\alpha_1)\vec{v}_1 + (\lambda\alpha_2)\vec{v}_2 \in W
\end{aligned}$$

Définition. Soit V un espace vectoriel. Soient $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n \in V$.

L'ensemble formé de toutes les combinaisons linéaires de $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$ est un sous-espace vectoriel de V appelé *sous-espace vectoriel engendré par* $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$, noté $\text{Vect}\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n\}$.

Définition. Soit W un sous-espace vectoriel de V et soient $\vec{w}_1, \vec{w}_2, \ldots, \vec{w}_p \in W$.

L'ensemble $\{\vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_p\}$ est appelé un *système de générateurs de* W si tout vecteur de W peut s'écrire comme une combinaison linéaire des vecteurs $\vec{w}_1, \vec{w}_2, \ldots, \vec{w}_p$, autrement dit, si

$$W = \text{Vect}\{\vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_p\}.$$

Remarque. Si $\vec{w}$ est une combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, alors $\text{Vect}\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\} = \text{Vect}\{\vec{u}, \vec{v}\}$.

Exemples

1. Soit $V = \mathbb{R}^3$. Considérons les vecteurs

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Les éléments de $\mathrm{Vect}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ sont de la forme

$$\alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 = \alpha_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \text{avec } \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}.$$

Ainsi,

$$\mathrm{Vect}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0\}.$$

D'autre part, comme

$$\alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 + \alpha_3 \vec{v}_3 = \alpha_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix}, \qquad \text{avec } \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R},$$

nous avons

$$\mathrm{Vect}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\} = \mathbb{R}^3.$$

Par conséquent, l'ensemble $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ est un système de générateurs de $\mathbb{R}^3$.

2. Soit $V = \mathbb{P}_2$. Considérons les polynômes

$$p_1(x) = 1, \qquad p_2(x) = x, \qquad p_3(x) = x^2, \qquad \text{avec } x \in \mathbb{R}.$$

Les éléments de $\operatorname{Vect}\{p_1, p_2\}$ sont de la forme

$$\alpha_1 p_1(x) + \alpha_2 p_2(x) = \alpha_1 + \alpha_2 x, \qquad \text{avec } \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}.$$

Ainsi,

$$\operatorname{Vect}\{p_1, p_2\} = \mathbb{P}_1.$$

Par conséquent, l'ensemble $\{p_1, p_2\}$ est un système de générateurs de $\mathbb{P}_1$.

D'autre part, comme

$$\alpha_1 p_1(x) + \alpha_2 p_2(x) + \alpha_3 p_3(x) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2, \qquad \text{avec } \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R},$$

nous avons

$$\operatorname{Vect}\{p_1, p_2, p_3\} = \mathbb{P}_2.$$

Par conséquent, l'ensemble $\{p_1, p_2, p_3\}$ est un système de générateurs de $\mathbb{P}_2$.

4.2. Bases et dimension

Définition. Soit V un espace vectoriel. Soient $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \ldots, \vec{b}_n$ des vecteurs de V.
L'ensemble de vecteurs $\mathcal{B} = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \ldots, \vec{b}_n\}$ est une *base de V* si et seulement si

1. l'ensemble $\mathcal{B} = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \ldots, \vec{b}_n\}$ est linéairement indépendant,
2. l'ensemble $\mathcal{B} = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \ldots, \vec{b}_n\}$ est un système de générateurs de V :
$$V = \mathrm{Vect}\, \mathcal{B} = \mathrm{Vect}\{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \ldots, \vec{b}_n\}.$$

Exemples

1. Soit $V = \mathbb{R}^3$.
   Les vecteurs $\vec{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\vec{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ et $\vec{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ sont linéairement indépendants.
   De plus, comme
   $$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = a_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + a_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + a_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + a_3 \vec{e}_3, \qquad \text{pour tout } a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R},$$
   les vecteurs $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ et $\vec{e}_3$ engendrent $V = \mathbb{R}^3$.
   Par conséquent, ils forment une base de $\mathbb{R}^3$, appelée *base canonique*, notée $\mathcal{E}$:
   $$\mathcal{E} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\} = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}.$$

2. Soit $V = \mathbb{R}^n$. Les vecteurs

$$\vec{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \ \vec{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \ \ldots, \ \vec{e}_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

sont linéairement indépendants et engendrent $V = \mathbb{R}^n$. Par conséquent, ils forment une base de $\mathbb{R}^n$, appelée *base canonique*, notée $\mathcal{E}$:

$$\mathcal{E} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n\}.$$

3. Soit $A = \begin{bmatrix} \vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \cdots & \vec{a}_n \end{bmatrix}$ une matrice carrée de taille $n \times n$.

En vertu du théorème de caractérisation des matrices inversibles, nous avons :

$$\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n\} \text{ est une base de } \mathbb{R}^n \quad \Longleftrightarrow \quad A \text{ est inversible.}$$

4. Soit $V = \mathbb{P}_2$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 2.

Nous avons vu que les polynômes

$$p_1(x) = 1, \quad p_2(x) = x \quad \text{et} \quad p_3(x) = x^2, \qquad \text{avec } x \in \mathbb{R},$$

sont linéairement indépendants. De plus, comme tout élément de $\mathbb{P}_2$ s'écrit

$$p(x) = a + bx + cx^2 = a\,p_1(x) + b\,p_2(x) + c\,p_3(x), \qquad \text{avec } a, b, c \in \mathbb{R},$$

les polynômes p_1, p_2 et p_3 forment une base de $\mathbb{P}_2$, appelée *base canonique*.

Remarque : Nous allons noter cette base $\mathcal{E} = \{1, x, x^2\}$ plutôt que $\mathcal{E} = \{p_1, p_2, p_3\}$.

5. Soit $V = \mathbb{P}_n$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n.

Comme les polynômes

$$p_1(x) = 1,\; p_2(x) = x,\; p_3(x) = x^2, \ldots,\; p_n(x) = x^{n-1},\; p_{n+1}(x) = x^n, \qquad \text{avec } x \in \mathbb{R},$$

sont linéairement indépendants et tout polynôme s'écrit

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n, \qquad \text{avec } a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R},$$

l'ensemble $\mathcal{E} = \{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$ est une base de $\mathbb{P}_n$, appelée *base canonique*.

6. Soit $V = M_{2,2}(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices de taille 2×2. Comme les matrices

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

sont linéairement indépendantes et toute matrice de taille 2×2 peut s'écrire sous la forme

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = a\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + d\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \text{avec } a, b, c, d \in \mathbb{R},$$

l'ensemble

$$\mathcal{E} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

est une base de $V = M_{2,2}(\mathbb{R})$, appelée *base canonique*.

Théorème (de la base extraite). Soit V un espace vectoriel.
Soit $\mathcal{S} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k\}$ un ensemble de vecteurs de V et soit $W = \mathrm{Vect}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k\}$ le sous-espace vectoriel de V engendré par $\mathcal{S}$.

a) Si l'un des vecteurs de $\mathcal{S}$ est une combinaison linéaire des autres vecteurs de $\mathcal{S}$ alors ces derniers engendrent encore W.

b) Si $W \neq \{\vec{0}\}$, alors il existe un sous-ensemble de $\mathcal{S}$ qui est une base de W. Autrement dit, il est possible d'extraire de l'ensemble $\mathcal{S}$ une base de W.

Preuve.

a) Supposons que $\vec{v}_k$ s'écrit comme combinaison linéaire de $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_{k-1}$ (si ce n'est pas le cas, il suffit de rénuméroter les vecteurs) :

$$\vec{v}_k = \alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2 + \ldots + \alpha_{k-1}\vec{v}_{k-1}$$

Soit maintenant $\vec{w}$ un vecteur quelconque de W. Comme $\mathcal{S}$ engendre W nous avons :

$$\begin{aligned}
\vec{w} &= \beta_1\vec{v}_1 + \beta_2\vec{v}_2 + \ldots + \beta_{k-1}\vec{v}_{k-1} + \beta_k\vec{v}_k \\
&= \beta_1\vec{v}_1 + \beta_2\vec{v}_2 + \ldots + \beta_{k-1}\vec{v}_{k-1} + \beta_k\left(\alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2 + \ldots + \alpha_{k-1}\vec{v}_{k-1}\right) \\
&= \left(\beta_1 + \beta_k\alpha_1\right)\vec{v}_1 + \left(\beta_2 + \beta_k\alpha_2\right)\vec{v}_2 + \ldots + \left(\beta_{k-1} + \beta_k\alpha_{k-1}\right)\vec{v}_{k-1}
\end{aligned}$$

ce qui montre que $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_{k-1}\}$ engendre encore W.

b) Si $\mathcal{S}$ est linéairement indépendant, alors $\mathcal{S}$ est une base. Sinon l'un des vecteurs de $\mathcal{S}$ est une combinaison linéaire des autres et par a), on peut l'enlever. On continue de la sorte jusqu'à ce que l'ensemble de vecteurs restant soit linéairement indépendant. ■

Théorème 1. Soit V un espace vectoriel et soit $\mathcal{B}=\{\vec{b}_1,\ldots,\vec{b}_n\}$ une base de V.
Si $m>n$, alors tout ensemble de vecteurs de V formé de m vecteurs est forcément linéairement dépendant.

Preuve. Soit $\{\vec{w}_1,\ldots,\vec{w}_m\}$, avec $m>n$, un ensemble de vecteurs de V. Il faut montrer que

$$\alpha_1\vec{w}_1+\alpha_2\vec{w}_2+\cdots+\alpha_m\vec{w}_m=\vec{0} \qquad (\star)$$

possède une solution non triviale $(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m)\neq(0,0,\ldots,0)$.
Comme $\mathcal{B}=\{\vec{b}_1,\vec{b}_2,\ldots,\vec{b}_n\}$ est une base de V, tout vecteur de V peut s'écrire comme une combinaison linéaire de $\vec{b}_1,\vec{b}_2,\ldots,\vec{b}_n$. En particulier

$$\begin{cases} \vec{w}_1 = a_{11}\vec{b}_1 + a_{12}\vec{b}_2 + a_{13}\vec{b}_3 + \cdots + a_{1n}\vec{b}_n \\ \vec{w}_2 = a_{21}\vec{b}_1 + a_{22}\vec{b}_2 + a_{23}\vec{b}_3 + \cdots + a_{2n}\vec{b}_n \\ \quad\vdots \\ \vec{w}_m = a_{m1}\vec{b}_1 + a_{m2}\vec{b}_2 + a_{m3}\vec{b}_3 + \cdots + a_{mn}\vec{b}_n \end{cases}$$

En remplaçant dans $(\star)$ nous trouvons :

$$\alpha_1\left(a_{11}\vec{b}_1+a_{12}\vec{b}_2+\cdots+a_{1n}\vec{b}_n\right)+\ldots+\alpha_m\left(a_{m1}\vec{b}_1+a_{m2}\vec{b}_2+\cdots+a_{mn}\vec{b}_n\right)=\vec{0}$$

ou de manière équivalente

$$\left(\alpha_1a_{11}+\alpha_2a_{21}+\ldots+\alpha_ma_{m1}\right)\vec{b}_1+\ldots+\left(\alpha_1a_{1n}+\alpha_2a_{2n}+\ldots+\alpha_ma_{mn}\right)\vec{b}_n=\vec{0}.$$

Comme $\mathcal{B} = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \ldots, \vec{b}_n\}$ est une base de V, les vecteurs $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \ldots, \vec{b}_n$ sont linéairement indépendants et par conséquent, tous les coefficients de cette équation sont nuls :

$$\underbrace{\left(\alpha_1 a_{11} + \alpha_2 a_{21} + \ldots + \alpha_m a_{m1}\right)}_{=0} \vec{b}_1 + \ldots + \underbrace{\left(\alpha_1 a_{1n} + \alpha_2 a_{2n} + \ldots + \alpha_m a_{mn}\right)}_{=0} \vec{b}_n = \vec{0}.$$

Nous trouvons ainsi un système de n équations homogènes à m inconnues $(\alpha_1, \alpha_2 \ldots, \alpha_m)$:

$$\begin{cases} a_{11}\alpha_1 + a_{21}\alpha_2 + \ldots + a_{m1}\alpha_m = 0 \\ \vdots \\ a_{1n}\alpha_1 + a_{2n}\alpha_2 + \ldots + a_{mn}\alpha_m = 0 \end{cases}$$

Comme par hypothèse $m > n$, le système possède des solutions non triviales, ce qui entraîne la dépendance linéaire des vecteurs $\vec{w}_1, \vec{w}_2, \ldots, \vec{w}_m$. ■

Corollaire. Soit V un espace vectoriel.

Toutes les bases de V contiennent le même nombre de vecteurs.

Preuve. Soient $\{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \ldots, \vec{b}_n\}$ et $\{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \ldots, \vec{w}_m\}$ deux bases de V.

Comme $\{\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_n\}$ est une base et par définition les vecteurs $\vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_m$ sont linéairement indépendants, le Théorème 1 nous donne $m \leqslant n$.

En échangeant les rôles de $\{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \ldots, \vec{b}_n\}$ et $\{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \ldots, \vec{w}_m\}$ nous obtenons $n \leqslant m$.

Par conséquent, $m = n$. ■

Définition. Soit V un espace vectoriel.

La *dimension* de V est le nombre de vecteurs d'une base de V. Elle est notée $\dim(V)$.

Remarque. Comme $\{\vec{0}\}$ est un ensemble linéairement dépendant, l'espace vectoriel $\{\vec{0}\}$ ne peut pas avoir de base et nous posons

$$\dim\left(\{\vec{0}\}\right) = 0.$$

Exemples

1. $\dim\left(\mathbb{R}^3\right) = 3$ car $\mathcal{E} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\} = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. $\dim\left(\mathbb{R}^n\right) = n$ car $\mathcal{E} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n\}$ est une base de $\mathbb{R}^n$.
3. $\dim\left(\mathbb{P}_2\right) = 3$ car $\mathcal{E} = \{1, x, x^2\}$ est une base de $\mathbb{P}_2$.
4. $\dim\left(\mathbb{P}_n\right) = n+1$ car $\mathcal{E} = \{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$ est une base de $\mathbb{P}_n$.
5. $\dim\left(M_{2,2}(\mathbb{R})\right) = 4$ car
$$\mathcal{E} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$
est une base de $M_{2,2}(\mathbb{R})$.
6. $\dim\left(M_{m,n}(\mathbb{R})\right) = mn$.

Théorème 2. Soit V un espace vectoriel de dimension $n > 0$.

a) Tout ensemble de n vecteurs linéairement indépendants engendre V.

b) Tout système de générateurs de V formé de n vecteurs est linéairement indépendant.

Conséquence. Si la dimension $n > 0$ de l'espace vectoriel V est connue, pour obtenir une base de V il suffit de trouver :

- soit n vecteurs linéairement indépendants de V,
- soit un système de générateurs de V formé de n vecteurs.

Application :

Montrer que $\mathcal{B} = \{(1,2,3),\ (-2,1,0),\ (1,0,0)\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

Comme $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$, il suffit de montrer que les trois vecteurs $(1,2,3)$, $(-2,1,0)$ et $(1,0,0)$ sont linéairement indépendants :

$$\alpha_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff \begin{cases} \alpha_1 - 2\alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ 3\alpha_1 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 = 0 \\ \alpha_3 = 0 \end{cases}$$

Ainsi, les vecteurs donnés forment bien une base de $\mathbb{R}^3$.

Proposition. Soit V un espace vectoriel de dimension $n > 0$.

a) Si $m < n$, alors un ensemble formé de m vecteurs de V n'engendre pas V.

b) Si $m < n$, alors un ensemble formé de m vecteurs linéairement indépendants de V peut être complété pour former une base de V.

Proposition. Soit V un espace vectoriel de dimension $n > 0$.

Soit W un sous-espace vectoriel de V. Nous avons :

a) $\dim W \leqslant \dim V$.

b) Si $\dim W = \dim V$ alors $W = V$.

Preuve.

Soit $\{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \ldots, \vec{w}_m\}$ une base de W.

a) Comme par définition les vecteurs $\vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_m$ sont linéairement indépendants, alors le Théorème 1 implique $m \leqslant \dim V$.

b) Si $m = \dim V$, alors par le Théorème 2a) les m vecteurs $\vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_m$ engendrent V et forment une base de V. Ainsi $W = V$. ■

Vecteur de coordonnées par rapport à une base

Théorème 3. Soit V un espace vectoriel de dimension $n > 0$.
Soit $\mathcal{B} = \{\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_n\}$ une base de V. Alors tout vecteur $\vec{v}$ de V s'écrit de *manière unique* comme combinaison linéaire de $\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_n$:

$$\vec{v} = \alpha_1 \vec{b}_1 + \alpha_2 \vec{b}_2 + \ldots + \alpha_n \vec{b}_n , \qquad \text{avec } \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}.$$

Preuve. Soient $\vec{v} = \alpha_1 \vec{b}_1 + \ldots + \alpha_n \vec{b}_n$ et $\vec{v} = \beta_1 \vec{b}_1 + \ldots + \beta_n \vec{b}_n$ deux écritures de $\vec{v}$. Nous avons

$$\vec{0} = (\alpha_1 - \beta_1)\vec{b}_1 + (\alpha_2 - \beta_2)\vec{b}_2 + \ldots + (\alpha_n - \beta_n)\vec{b}_n .$$

Comme les vecteurs $\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_n$ sont linéairement indépendants, nous trouvons

$$\alpha_j - \beta_j = 0, \qquad \text{pour } j = 1, 2, \ldots, n \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha_j = \beta_j, \qquad \text{pour } j = 1, 2, \ldots, n . \qquad \blacksquare$$

Définition. Les nombres $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ sont appelés *coordonnées de $\vec{v}$ dans la base $\mathcal{B}$.*

Remarque. Il suit du Théorème 3 que pour tout choix d'une base $\mathcal{B}$ de V, nous pouvons associer le vecteur $\vec{v} \in V$ au vecteur $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$, appelé *vecteur des coordonnées de $\vec{v}$ dans la base $\mathcal{B}$*, noté $[\vec{v}]_{\mathcal{B}}$:

$$\vec{v} = \alpha_1 \vec{b}_1 + \alpha_2 \vec{b}_2 + \ldots + \alpha_n \vec{b}_n \in V \qquad \Longleftrightarrow \qquad [\vec{v}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

Attention : L'ordre des vecteurs de la base est important.

Exemples

1. Trouver les coordonnées de $\vec{v} = (2,4) \in \mathbb{R}^2$ par rapport à :

   a) la base canonique $\mathcal{E} = \{(1,0),(0,1)\}$:

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 4\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \Longleftrightarrow \qquad [\vec{v}]_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

   b) la base $\mathcal{B} = \{(1,1),(1,-1)\}$:

   Nous cherchons $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \alpha\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \beta\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha+\beta \\ \alpha-\beta \end{bmatrix}.$$

   Nous devons résoudre le système

$$\begin{cases} \alpha+\beta = 2 \\ \alpha-\beta = 4 \end{cases} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} \alpha = 3 \\ \beta = -1 \end{cases}$$

   Nous avons donc

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} = 3\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + (-1)\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad \Longleftrightarrow \qquad [\vec{v}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

2. Soit $V=\mathbb{P}_2$ et $\mathcal{E}=\{1,x,x^2\}$ la base canonique de $V=\mathbb{P}_2$. Nous avons :

$$p(x)=2-3x+7x^2\in\mathbb{P}_2 \qquad\Longleftrightarrow\qquad [p]_{\mathcal{E}}=\begin{bmatrix}2\\-3\\7\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^3$$

En prenant la base $\mathcal{B}=\{x^2,x,1\}$ nous trouvons :

$$p(x)=2-3x+7x^2\in\mathbb{P}_2 \qquad\Longleftrightarrow\qquad [p]_{\mathcal{B}}=\begin{bmatrix}7\\-3\\2\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^3$$

3. Soit $V=M_{2,3}(\mathbb{R})$ et $\mathcal{E}$ la base canonique de $V=M_{2,3}(\mathbb{R})$. Nous avons :

$$A=\begin{bmatrix}4&5&6\\7&8&9\end{bmatrix}\in M_{2,3}(\mathbb{R}) \qquad\Longleftrightarrow\qquad [A]_{\mathcal{E}}=\begin{bmatrix}4\\5\\6\\7\\8\\9\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^6$$