

## Combinaisons linéaires

**Définition.** Soit  $V$  un espace vectoriel. Un vecteur  $\vec{v}$  de  $V$  est une *combinaison linéaire* des vecteurs  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$  de  $V$  s'il peut s'écrire sous la forme

$$\vec{v} = \alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 + \dots + \alpha_n \vec{v}_n, \quad \text{avec } \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}.$$

Les nombres  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  sont appelés *poids* (ou *coefficients*) de la combinaison linéaire.

### Exemples

1. Soit  $V = \mathbb{R}^3$  et soient  $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ ,  $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ . Comme

$$3\vec{v}_1 + 2\vec{v}_2 = 3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} = \vec{v},$$

le vecteur  $\vec{v}$  est combinaison linéaire de  $\vec{v}_1$  et  $\vec{v}_2$  avec poids respectifs  $\alpha_1 = 3$  et  $\alpha_2 = 2$ .

2. Soit  $V = \mathbb{P}_2$  et soient  $p_1(x) = 2x^2 + 3$ ,  $p_2(x) = x^2 - x$ . Comme

$$4p_1(x) + (-8)p_2(x) = 4(2x^2 + 3) + (-8)(x^2 - x) = 8x + 12,$$

le polynôme  $p(x) = 8x + 12$  est combinaison linéaire de  $p_1$  et  $p_2$  avec poids respectifs  $\alpha_1 = 4$  et  $\alpha_2 = -8$ .

## Indépendance linéaire

**Définition.** Soit  $V$  un espace vectoriel. Soient  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$  des vecteurs de  $V$ .

Les vecteurs  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$  sont *linéairement indépendants* (ou *libres*) si la seule solution de l'équation

$$x_1 \vec{v}_1 + x_2 \vec{v}_2 + \dots + x_n \vec{v}_n = \vec{0}$$

est la solution nulle (ou triviale) :

$$x_1 = 0, x_2 = 0, \dots, x_n = 0.$$

Si par contre, il existe des poids  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$  non tous nuls tels que

$$\alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 + \dots + \alpha_n \vec{v}_n = \vec{0} \quad (\star)$$

on dit que les vecteurs sont *linéairement dépendants* (ou *liés*) et dans ce cas,  $(\star)$  est appelée une *relation de dépendance linéaire*.

**Remarque.** Tout ensemble de vecteurs qui contient le vecteur  $\vec{0}$  est toujours linéairement dépendant car

$$1 \cdot \vec{0} + 0 \vec{v}_1 + 0 \vec{v}_2 + \dots + 0 \vec{v}_n = \vec{0} \quad \text{et } (1, 0, 0, \dots, 0) \neq (0, 0, 0, \dots, 0).$$

## Exemples

1. Soit  $V = \mathbb{R}^3$ . Les vecteurs

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

sont linéairement indépendants. En effet,

$$\begin{aligned} \alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 + \alpha_3 \vec{v}_3 = \vec{0} &\iff \alpha_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &\iff \begin{bmatrix} \alpha_1 + 2\alpha_2 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &\iff \begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 = 0 \\ \alpha_2 = 0 \\ \alpha_3 = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

2. Par contre, les vecteurs

$$\vec{w}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{w}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{w}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

sont linéairement dépendants. En effet,

$$\begin{aligned} \alpha_1 \vec{w}_1 + \alpha_2 \vec{w}_2 + \alpha_3 \vec{w}_3 = \vec{0} &\iff \alpha_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &\iff \begin{bmatrix} \alpha_1 + 2\alpha_2 \\ \alpha_2 + \alpha_3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &\iff \begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 = 0 \\ \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha_1 = -2\alpha_2 \\ \alpha_3 = -\alpha_2 \end{cases} \\ &\iff \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \text{avec } t \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Nous avons la relation de dépendance linéaire :

$$(-2)\vec{w}_1 + 1\vec{w}_2 + (-1)\vec{w}_3 = \vec{0}.$$

3. Soit  $V = \mathbb{P}_2$ . Les polynômes

$$p_1(x) = 1, \quad p_2(x) = x, \quad p_3(x) = x^2, \quad \text{avec } x \in \mathbb{R},$$

sont linéairement indépendants. En effet,

$$\begin{aligned} \alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \alpha_3 p_3 = 0 & \iff \alpha_1 1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2 = 0 \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R} \\ & \iff \begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 = 0 \\ \alpha_3 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Par contre, les polynômes

$$q_1(x) = x^2 - 2x, \quad q_2(x) = x^2 + 3, \quad q_3(x) = 2x + 3, \quad \text{avec } x \in \mathbb{R},$$

sont linéairement dépendants car

$$1 q_1(x) + (-1) q_2(x) + 1 q_3(x) = 0.$$

4. Soit  $V = F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ . Les fonctions

$$f_1(x) = \cos(x) \quad \text{et} \quad f_2(x) = \sin(x)$$

sont linéairement indépendantes. En effet, si

$$\alpha_1 \cos(x) + \alpha_2 \sin(x) = 0 \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R},$$

nous avons en particulier, en prenant  $x = 0$  et  $x = \frac{\pi}{2}$  :

$$\begin{cases} \alpha_1 \cos(0) + \alpha_2 \sin(0) = 0 \\ \alpha_1 \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \alpha_2 \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} \alpha_1 = 0, \\ \alpha_2 = 0. \end{cases}$$

Par contre, les fonctions

$$g_1(x) = \cos^2(x), \quad g_2(x) = \sin^2(x) \quad \text{et} \quad g_3(x) = \cos(2x)$$

sont linéairement dépendantes car nous savons que

$$\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) \iff 1g_1(x) + (-1)g_2(x) + (-1)g_3(x) = 0, \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

5. Soit  $V = F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ . Les fonctions

$$f_1(x) = \cos(x), \quad f_2(x) = \cos(3x) \quad \text{et} \quad f_3(x) = \cos^3(x)$$

sont linéairement dépendantes. En effet, nous savons que

$$\cos(3x) = 4\cos^3(x) - 3\cos(x) \iff 3f_1(x) + 1f_2(x) + (-4)f_3(x) = 0, \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

Alternativement, nous pouvons résoudre

$$\alpha_1 \cos(x) + \alpha_2 \cos(3x) + \alpha_3 \cos^3(x) = 0 \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

En prenant  $x = 0$ ,  $x = \frac{\pi}{6}$  et  $x = \frac{\pi}{3}$  nous obtenons le système homogène

$$\begin{cases} \alpha_1 \cos(0) + \alpha_2 \cos(0) + \alpha_3 \cos^3(0) = 0 \\ \alpha_1 \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + \alpha_2 \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + \alpha_3 \cos^3\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0 \\ \alpha_1 \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + \alpha_2 \cos(\pi) + \alpha_3 \cos^3\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ 4\alpha_1 + 3\alpha_3 = 0 \\ 4\alpha_1 - 8\alpha_2 + \alpha_3 = 0 \end{cases}$$

Comme la solution de ce système est

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \text{avec } t \in \mathbb{R},$$

nous retrouvons la relation de dépendance linéaire

$$3f_1(x) + 1f_2(x) + (-4)f_3(x) = 0, \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

**Théorème.** (Caractérisation des ensembles linéairement dépendants)

Soit  $V$  un espace vectoriel. Soient  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k$  des vecteurs de  $V$  (avec  $k \geq 2$ ).

L'ensemble  $\mathcal{S} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k\}$  est linéairement dépendant si et seulement si, au moins un des vecteurs de  $\mathcal{S}$  peut s'écrire comme combinaison linéaire des autres.

*Preuve.* Analogue au cas  $V = \mathbb{R}^n$  traité au chapitre 1. ■

**Corollaire.** Si l'ensemble de vecteurs  $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$  est linéairement dépendant alors l'ensemble  $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n, \vec{v}\}$  est linéairement dépendant *pour n'importe quel choix de  $\vec{v} \in V$ .*

*Preuve.* Si  $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$  est linéairement dépendant, alors au moins un des vecteurs est combinaison linéaire des autres. Supposons que  $\vec{v}_1 = \beta_2 \vec{v}_2 + \beta_3 \vec{v}_3 + \dots + \beta_n \vec{v}_n$ . Nous avons donc

$$\vec{v}_1 = \beta_2 \vec{v}_2 + \beta_3 \vec{v}_3 + \dots + \beta_n \vec{v}_n + 0\vec{v}.$$

Par conséquent, l'ensemble  $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n, \vec{v}\}$  est linéairement dépendant. ■

**Corollaire.** Si  $\mathcal{S} = \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$  est un ensemble de vecteurs linéairement indépendants alors tout sous-ensemble  $\mathcal{T}$  de  $\mathcal{S}$  est formé de vecteurs linéairement indépendants.

*Preuve.* Supposons qu'un sous-ensemble  $\mathcal{T}$  de  $\mathcal{S}$  est formé de vecteurs linéairement dépendants. Le corollaire précédent entraîne que l'ensemble  $\mathcal{S}$  est aussi formé de vecteurs linéairement dépendants, ce qui est en contradiction avec l'hypothèse. ■



## Sous-espaces vectoriels

**Définition.** Soit  $V$  un espace vectoriel et soit  $W \subset V$  un sous-ensemble non-vidé de  $V$ .

On dit que  $W$  est un *sous-espace vectoriel de  $V$*  si  $W$  est lui-même un espace vectoriel avec les mêmes opérations d'addition et multiplication par un scalaire.

**Proposition.** Soit  $V$  un espace vectoriel et soit  $W \subset V$  un sous-ensemble de  $V$ .

Alors  $W$  est un sous-espace vectoriel de  $V$  si et seulement si les conditions suivantes sont satisfaites :

0. Le vecteur zéro  $\vec{0}$  de  $V$  est contenu dans  $W$ .

1. Si  $\vec{w}_1, \vec{w}_2 \in W$  alors  $\vec{w}_1 + \vec{w}_2 \in W$

2. Si  $\vec{w} \in W$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$  alors  $\lambda \vec{w} \in W$

En d'autres termes,  $W \subset V$  est un sous-espace vectoriel de  $V$  si toute combinaison linéaire d'éléments de  $W$  est un élément de  $W$ .

*Preuve.* Les conditions 0, 1 et 2 correspondent aux axiomes 4, 1 et 6 respectivement.

En prenant  $\lambda = -1$ , la condition 2 nous donne l'axiome 5 :

$$\text{si } \vec{w} \in W \text{ alors } -\vec{w} = (-1)\vec{w} \in W .$$

Les autres axiomes restent valables sur  $W$  car ils le sont dans  $V$ . ■

## Remarques.

- Si  $V$  est un espace vectoriel, alors  $V$  est le plus grand sous-espace vectoriel de  $V$  et l'ensemble  $\{\vec{0}\} \subset V$  est le plus petit sous-espace vectoriel de  $V$ . En effet, nous avons

$$\vec{0} \in \{\vec{0}\}, \quad \vec{0} + \vec{0} = \vec{0} \quad \text{et} \quad \lambda \vec{0} = \vec{0} \quad \text{pour tout } \lambda \in \mathbb{R}.$$

- Pour montrer qu'un ensemble non-vide est un espace vectoriel, il suffit de montrer qu'il est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel connu, ce qui est plus simple à faire.

## Exemples

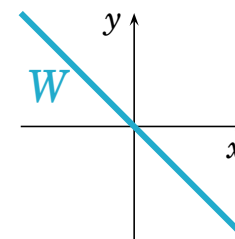
1. L'ensemble  $W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y = 0\}$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^2$ .

En effet, le vecteur  $(0, 0)$  est dans  $W$  et comme les éléments de  $W$  sont de la forme  $(x, -x)$ , avec  $x \in \mathbb{R}$ , nous avons :

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ -x_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2 \\ -x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ -(x_1 + x_2) \end{bmatrix} \in W,$$

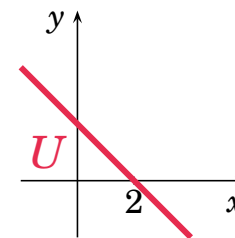
$$\lambda \begin{bmatrix} x \\ -x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda x \\ -\lambda x \end{bmatrix} \in W.$$

$W \subset \mathbb{R}^2$  est la droite de pente  $-1$  qui passe par l'origine.



2. L'ensemble  $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y = 2\}$  *n'est pas* un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^2$ . En effet, il suffit de constater que  $(0, 0) \notin U$ .

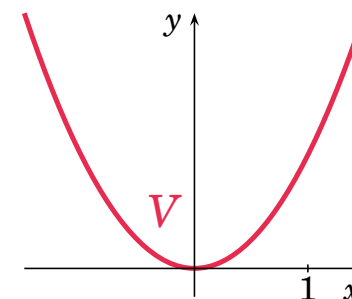
$U \subset \mathbb{R}^2$  est la droite de pente  $-1$  qui passe par  $(0, 2)$ .



3. L'ensemble  $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^2\}$  *n'est pas* un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^2$  même si  $(0, 0) \in V$ . En effet, les éléments de  $V$  sont de la forme  $(x, x^2)$ , avec  $x \in \mathbb{R}$ , d'où

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_1^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2 \\ x_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1^2 + x_2^2 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ (x_1 + x_2)^2 \end{bmatrix} \quad \text{en général}$$

$$\lambda \begin{bmatrix} x \\ x^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda x \\ \lambda x^2 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} \lambda x \\ (\lambda x)^2 \end{bmatrix} \quad \text{en général}$$



4. L'ensemble  $C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  des fonctions continues est un sous-espace vectoriel de  $F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  car la somme de deux fonctions continues est continue et le produit d'une fonction continue par un scalaire reste continue.
5. L'ensemble  $\mathbb{P}_n$  est un sous-espace vectoriel de  $F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  pour tout  $n = 0, 1, 2, \dots$
6. L'ensemble  $\mathbb{P}_k$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{P}_n$  pour tout  $k = 0, 1, 2, \dots, n$