3. Déterminants

3.1. Définitions et propriétés

Définition.

- Le déterminant de la matrice $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_{2,2}(\mathbb{R})$ est le nombre
$$\det(A) = ad - bc.$$
- Le déterminant de la matrice $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \in M_{3,3}(\mathbb{R})$ est le nombre
$$\det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

Règle de Sarrus :

$$\begin{array}{ccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \\ - \quad - \quad - & & + & + & + \end{array}$$

Attention : La règle de Sarrus est uniquement valable pour des matrices de taille 3×3.

Nous pouvons réécrire le déterminant d'une matrice de taille 3×3 de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ &\quad - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} \\ &= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) \\ &= a_{11}\det\begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} - a_{12}\det\begin{bmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix} + a_{13}\det\begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

En notant par A_{jk} la matrice de taille 2×2 obtenue en supprimant la j-ème ligne et la k-ème colonne de la matrice $A \in M_{3,3}(\mathbb{R})$:

$$A_{11} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \qquad A_{12} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \qquad A_{13} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix},$$

la formule précédente s'écrit

$$\det(A) = a_{11}\det(A_{11}) - a_{12}\det(A_{12}) + a_{13}\det(A_{13}).$$

Exemple

$$\det\begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 2 & 4 & -6 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} = 1\,\underbrace{\det\begin{bmatrix} 4 & -6 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}}_{=4\cdot 0-3(-6)=18} - 5\,\underbrace{\det\begin{bmatrix} 2 & -6 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{=2\cdot 0-0(-6)=0} + 0\,\det\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = 18$$

Nous pouvons maintenant donner une définition récursive du déterminant d'une matrice carrée quelconque :

Définition. Soit $A = [a_{jk}]$ une matrice carrée de taille $n \times n$.
Le *déterminant* de A est le nombre

$$\begin{aligned} \det(A) &= a_{11}\det(A_{11}) - a_{12}\det(A_{12}) + a_{13}\det(A_{13}) - a_{14}\det(A_{14}) + \ldots + (-1)^{1+n} a_{1n}\det(A_{1n}) \\ &= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{1+k} a_{1k}\det(A_{1k}), \end{aligned}$$

où A_{jk} est la matrice de taille $(n-1)\times(n-1)$ obtenue à partir de la matrice A en supprimant la j-ème ligne et la k-ème colonne :

$$A_{jk} = \left[\begin{matrix} & \vdots & \\ \text{- - -} & a_{jk} & \text{- - -} \\ & \vdots & \end{matrix}\right]$$

Notation. Parfois on utilise la notation $|A|$ pour le déterminant de A.

Définition. Soit $A = [a_{jk}]$ une matrice carrée de taille $n \times n$.
Le *cofacteur (j,k)* de A est le nombre

$$C_{jk} = (-1)^{j+k}\det(A_{jk}).$$

En utilisant les cofacteurs, le déterminant de la matrice A devient

$$\det(A) = a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + a_{13}C_{13} + a_{14}C_{14} + \ldots + a_{1n}C_{1n} = \sum_{k=1}^{n} a_{1k}C_{1k}.$$

Théorème (développement par rapport à la j-ème ligne).
Soit $A = [a_{jk}]$ une matrice carrée de taille $n \times n$. Nous avons

$$\begin{aligned} \det(A) &= (-1)^{j+1} a_{j1}\det(A_{j1}) + (-1)^{j+2} a_{j2}\det(A_{j2}) + \ldots + (-1)^{j+n} a_{jn}\det(A_{jn}) \\ &= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{j+k} a_{jk}\det(A_{jk}), \end{aligned}$$

ou encore

$$\det(A) = a_{j1}C_{j1} + a_{j2}C_{j2} + a_{j3}C_{j3} + a_{j4}C_{j4} + \ldots + a_{jn}C_{jn} = \sum_{k=1}^{n} a_{jk}C_{jk}.$$

Exemples

Développement par rapport à la deuxième ligne :

$$\begin{aligned}\det\begin{bmatrix}1 & 5 & 0\\ 2 & 4 & -6\\ 0 & 3 & 0\end{bmatrix} &\underset{\substack{\uparrow\\ \text{dév. } L_2}}{=} 2(-1)^{2+1}\underbrace{\det\begin{bmatrix}5 & 0\\ 3 & 0\end{bmatrix}}_{=0}+4(-1)^{2+2}\underbrace{\det\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}}_{=0}+(-6)(-1)^{2+3}\underbrace{\det\begin{bmatrix}1 & 5\\ 0 & 3\end{bmatrix}}_{=3}\\ &= 18\end{aligned}$$

Développement par rapport à la troisième ligne :

$$\begin{aligned}\det\begin{bmatrix}1 & 5 & 0\\ 2 & 4 & -6\\ 0 & 3 & 0\end{bmatrix} &\underset{\substack{\uparrow\\ \text{dév. } L_3}}{=} +0(-1)^{3+1}\det\begin{bmatrix}5 & 0\\ 4 & -6\end{bmatrix}+3(-1)^{3+2}\underbrace{\det\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & -6\end{bmatrix}}_{=-6}+0(-1)^{3+3}\det\begin{bmatrix}1 & 5\\ 2 & 4\end{bmatrix}\\ &= 18\end{aligned}$$

Remarques.

- Pour calculer le déterminant d'une matrice de taille 4×4, il faut donc calculer quatre déterminants de matrices de taille 3×3 et pour chacun de ceux-ci, il faut calculer trois déterminants de matrices de taille 2×2. Pour calculer le déterminant d'une matrice de taille 5×5, il faut calculer $5\cdot 4\cdot 3 = 60$ déterminants et ainsi de suite. Nous avons donc intérêt à trouver une méthode qui demande moins de calculs.
- Le théorème est utile dans le cas où le développement se fait par rapport à une ligne qui contient beaucoup de zéros. En particulier, si la matrice A contient une ligne formée de zéros, alors son déterminant est nul :
$$\det(A) = 0\,.$$

Théorème. Si $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ est une matrice triangulaire (supérieure ou inférieure) alors :

$$\det(A) = a_{11}a_{22}a_{33}\cdots a_{nn}.$$

Preuve. Supposons que A est une matrice triangulaire inférieure. Le calcul nous donne :

$$\det\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{bmatrix} \underset{\text{dév. } L_1}{\overset{\uparrow}{=}} a_{11}\det\begin{bmatrix} a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{bmatrix} \underset{\text{dév. } L_1}{\overset{\uparrow}{=}} a_{11}a_{22}\det\begin{bmatrix} a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n3} & \cdots & a_{nn}\end{bmatrix}$$

$$= \ldots = a_{11}a_{22}\cdots a_{n-2,n-2}\det\begin{bmatrix} a_{n-1,n-1} & 0 \\ a_{n,n-1} & a_{nn}\end{bmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}\cdots a_{n-1,n-1}a_{nn}.$$

Le calcul est analogue dans le cas où A est une matrice triangulaire supérieure :

$$\det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn}\end{bmatrix} \underset{\text{dév. } L_n}{\overset{\uparrow}{=}} (-1)^{n+n}a_{nn}\det\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{n-1,n-1}\end{bmatrix}$$

$$= \ldots = a_{nn}\cdots a_{22}a_{11}$$

■

Idée : Pour calculer le déterminant d'une matrice, nous pouvons l'échelonner.

Question. Quels sont les effets des opérations élémentaires sur les lignes lors du calcul du déterminant ?

Théorème. Soient A et C deux matrices carrées de taille $n \times n$.

a) Si $A \underset{L_j \leftrightarrow L_k}{\frown} C$ alors $\det(C) = -\det(A)$.

b) Si $A \underset{L_j \to \lambda L_j}{\frown} C$ (avec $\lambda \neq 0$) alors $\det(C) = \lambda\det(A)$ ou $\det(A) = \frac{1}{\lambda}\det(C)$.

c) Si $A \underset{L_j \to L_j + \lambda L_k}{\frown} C$ alors $\det(C) = \det(A)$.

Vérification dans le cas $n = 2$:

Soit $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d\end{bmatrix}$. Nous avons $\det(A) = ad - bc$ et

a) $\det\begin{bmatrix} c & d \\ a & b\end{bmatrix} = cb - ad = -\det(A)$.

b) $\det\begin{bmatrix} \lambda a & \lambda b \\ c & d\end{bmatrix} = \lambda ad - \lambda bc = \lambda(ad - bc) = \lambda\det(A)$.

c) $\det\begin{bmatrix} a + \lambda c & b + \lambda d \\ c & d\end{bmatrix} = (a + \lambda c)d - (b + \lambda d)c = ad - bc = \det(A)$.

Corollaire. Soit A une matrice carrée de taille $n\times n$ et soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors

$$\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A).$$

Preuve. Le calcul nous donne

$$\det(\lambda A) = \det\begin{bmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{n1} & \lambda a_{n2} & \cdots & \lambda a_{nn} \end{bmatrix} \underset{\text{facteur } \lambda \text{ de } L_1}{=} \lambda \det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{n1} & \lambda a_{n2} & \cdots & \lambda a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\underset{\text{facteur } \lambda \text{ de } L_2}{=} \lambda^2 \det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{n1} & \lambda a_{n2} & \cdots & \lambda a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$= \ldots \underset{\text{facteur } \lambda \text{ de } L_n}{=} \lambda^n \det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = \lambda^n \det(A)$$

■

Théorème. Soient A et B deux matrices carrées de taille $n\times n$ à coefficients dans $\mathbb{R}$. Alors

$$\det(AB) = (\det A)(\det B).$$

Vérification dans le cas $n=2$:

Soient $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}$. Nous avons

$$\begin{aligned} \det(AB) &= \det\begin{bmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{bmatrix} \\ &= (ae+bg)(cf+dh)-(af+bh)(ce+dg) \\ &= eh(ad-bc)-fg(ad-bc) \\ &= (ad-bc)(eh-fg) \\ &= (\det A)(\det B). \end{aligned}$$

Remarque. Même si $AB \neq BA$ en général, nous avons toujours

$$\det(AB) = \det(BA).$$

Théorème. Soit A une matrice carrée de taille $n \times n$. Alors nous avons l'équivalence

$$A \text{ est inversible} \quad \Longleftrightarrow \quad \det(A) \neq 0$$

Preuve.

$\Rightarrow$) Si A est inversible, alors il existe une matrice $A^{-1} \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ telle que

$$AA^{-1} = I_n = A^{-1}A.$$

Comme

$$\det(AA^{-1}) = \det(I_n) = 1 \quad \Longrightarrow \quad \det(A)\det(A^{-1}) = 1,$$

nous trouvons $\det(A) \neq 0$.

$\Leftarrow$) Supposons que A n'est pas inversible. A voir : $\det(A) = 0$.
Le théorème des matrices inversibles nous dit que A ne possède pas n positions pivot et de ce fait, la matrice échelonnée–réduite associée à la matrice A contient des lignes formées de zéros, d'où le résultat. ■

Corollaire. Si la matrice A est inversible alors

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}.$$

Remarque. Le théorème précédent est particulièrement utile pour déterminer si une matrice est inversible *avant* de commencer le calcul de la matrice inverse.

Exemples

Reprenons deux matrices vues précédemment :

1. Comme $\det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \underset{\text{dév. } L_1}{=} 1 \cdot \underbrace{\det \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}}_{=2-0=2} - 0 + 1 \cdot \underbrace{\det \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}_{=0-1=-1} = 2 - 1 = 1 \neq 0,$

   la matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ est inversible (ce que nous savions déjà).

2. Comme $\det \begin{bmatrix} 0 & 3 & -5 \\ 1 & 0 & 2 \\ -4 & -9 & 7 \end{bmatrix} \underset{\text{dév. } L_1}{=} 0 - 3 \cdot \underbrace{\det \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -4 & 7 \end{bmatrix}}_{=7+8=15} + (-5) \cdot \underbrace{\det \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 9 \end{bmatrix}}_{=-9} = -45 + 45 = 0,$

   la matrice $A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -5 \\ 1 & 0 & 2 \\ -4 & -9 & 7 \end{bmatrix}$ n'est pas inversible (ce que nous savions déjà).

Théorème. Soit $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ une matrice inversible de taille 2×2. Nous avons

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \frac{1}{\det(A)}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

Preuve. Supposons que $a \neq 0$. Le calcul nous donne

$$\left[\begin{array}{cc|cc} a & b & 1 & 0 \\ c & d & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{L_2\to aL_2}{\sim} \left[\begin{array}{cc|cc} a & b & 1 & 0 \\ ac & ad & 0 & a \end{array}\right] \underset{L_2\to L_2-cL_1}{\sim} \left[\begin{array}{cc|cc} a & b & 1 & 0 \\ 0 & ad-bc & -c & a \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|cc} a & b & 1 & 0 \\ 0 & |A| & -c & a \end{array}\right]$$

$$\underset{L_1\to|A|L_1}{\sim} = \left[\begin{array}{cc|cc} a|A| & b|A| & |A| & 0 \\ 0 & |A| & -c & a \end{array}\right] \underset{L_1\to L_1-bL_2}{\sim} \left[\begin{array}{cc|cc} a|A| & 0 & ad & -ab \\ 0 & |A| & -c & a \end{array}\right]$$

et nous trouvons le résultat en divisant L_1 par $a|A| \neq 0$ et L_2 par $|A| \neq 0$.

Supposons maintenant que $a = 0$. Comme A est inversible, il faut que $b \neq 0$ et $c \neq 0$. D'où

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 0 & b & 1 & 0 \\ c & d & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{L_1\leftrightarrow L_2}{\sim} \left[\begin{array}{cc|cc} c & d & 0 & 1 \\ 0 & b & 1 & 0 \end{array}\right] \underset{L_1\to -bL_1}{\sim} \left[\begin{array}{cc|cc} -bc & -bd & 0 & -b \\ 0 & b & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\underset{L_1\to L_1+dL_2}{\sim} \left[\begin{array}{cc|cc} -bc & 0 & d & -b \\ 0 & b & 1 & 0 \end{array}\right] \underset{L_2\to -cL_2}{\sim} \left[\begin{array}{cc|cc} -bc & 0 & d & -b \\ 0 & -bc & -c & 0 \end{array}\right]$$

et nous trouvons le résultat en divisant les lignes L_1 et L_2 par $|A| = -bc \neq 0$. ■

Théorème. Soit A une matrice carrée de taille $n\times n$ et A^T sa matrice transposée. Nous avons

$$\det(A^T) = \det(A).$$

Vérification dans le cas $n = 2$:

Nous avons $\quad \det\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = ad - bc = \det\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$

Conséquence. Nous pouvons remplacer le mot « ligne » par le mot « colonne » dans tous les résultats concernant le calcul du déterminant. Par exemple :

- Si la matrice A possède une colonne formée de zéros alors $\det(A) = 0$.
- Nous pouvons faire un développement par rapport à la k-ème colonne :
$$\begin{aligned}\det(A) &= (-1)^{1+k}a_{1k}\det(A_{1k}) + (-1)^{2+k}a_{2k}\det(A_{2k}) + \ldots + (-1)^{n+k}a_{nk}\det(A_{nk}) \\ &= a_{1k}C_{1k} + a_{2k}C_{2k} + \ldots + a_{nk}C_{nk}.\end{aligned}$$
- Nous pouvons faire des opérations élémentaires sur les colonnes pour introduire des zéros dans la matrice.

Calcul du déterminant

Pour calculer un déterminant nous pouvons :

- développer par rapport à une ligne (ou à une colonne),
- faire des opérations élémentaires sur les lignes (ou les colonnes),
- combiner les deux.

Exemples

Calculer les déterminants suivants :

1. $$\det\begin{bmatrix}3&2&1\\2&4&5\\1&0&2\end{bmatrix} \underset{\substack{\uparrow\\ \text{dév. } L_3}}{=} 1\cdot\underbrace{\det\begin{bmatrix}2&1\\4&5\end{bmatrix}}_{=10-4=6} - 0\cdot\det\begin{bmatrix}3&1\\2&5\end{bmatrix} + 2\cdot\underbrace{\det\begin{bmatrix}3&2\\2&4\end{bmatrix}}_{=12-4=8} = 1\cdot 6 + 2\cdot 8 = 22$$

Calculs alternatifs :

$$\det\begin{bmatrix}3&2&1\\2&4&5\\1&0&2\end{bmatrix} \underset{\substack{\uparrow\\ C_3\to C_3-2C_1}}{=} \det\begin{bmatrix}3&2&-5\\2&4&1\\1&0&0\end{bmatrix} \underset{\substack{\uparrow\\ \text{dév. } L_3}}{=} 1\cdot\underbrace{\det\begin{bmatrix}2&-5\\4&1\end{bmatrix}}_{=2-(-20)=22} - 0 + 0 = 22$$

$$\det\begin{bmatrix}3&2&1\\2&4&5\\1&0&2\end{bmatrix} \underset{\substack{\uparrow\\ L_1\leftrightarrow L_3}}{=} -\det\begin{bmatrix}1&0&2\\2&4&5\\3&2&1\end{bmatrix} \underset{\substack{\uparrow\\ L_2\to L_2-2L_1\\ L_3\to L_3-3L_1}}{=} -\det\begin{bmatrix}1&0&2\\0&4&1\\0&2&-5\end{bmatrix} \underset{\substack{\uparrow\\ \text{dév. } C_1}}{=} -1\cdot\underbrace{\det\begin{bmatrix}4&1\\2&-5\end{bmatrix}}_{=-20-2=-22} = 22$$

$$\det\begin{bmatrix}3&2&1\\2&4&5\\1&0&2\end{bmatrix} = \cdots = -\det\begin{bmatrix}1&0&2\\0&4&1\\0&2&-5\end{bmatrix} \underset{\substack{\uparrow\\ L_3\to L_3-\frac{1}{2}L_2}}{=} -\det\begin{bmatrix}1&0&2\\0&4&1\\0&0&-\frac{11}{2}\end{bmatrix} = -1\cdot 4\cdot\left(-\frac{11}{2}\right) = 22$$

2. $\det\begin{bmatrix}1&0&0&3\\2&7&0&6\\0&6&3&0\\7&3&1&1\end{bmatrix} \underset{C_4\to C_4-3C_1}{=} \det\begin{bmatrix}1&0&0&0\\2&7&0&0\\0&6&3&0\\7&3&1&-20\end{bmatrix} = 1\cdot 7\cdot 3\cdot(-20) = -420$

3. $\det\begin{bmatrix}1&2&1&4\\0&3&9&9\\2&0&1&0\\1&1&1&1\end{bmatrix} \underset{\substack{L_3\to L_3-2L_1\\ L_4\to L_4-L_1}}{=} \det\begin{bmatrix}1&2&1&4\\0&3&9&9\\0&-4&-1&-8\\0&-1&0&-3\end{bmatrix} \underset{\text{facteur 3 de } L_2}{=} 3\cdot\det\begin{bmatrix}1&2&1&4\\0&1&3&3\\0&-4&-1&-8\\0&-1&0&-3\end{bmatrix}$

$\underset{\substack{L_3\to L_3+4L_2\\ L_4\to L_4+L_2}}{=} 3\cdot\det\begin{bmatrix}1&2&1&4\\0&1&3&3\\0&0&11&4\\0&0&3&0\end{bmatrix} \underset{C_3\leftrightarrow C_4}{=} -3\cdot\det\begin{bmatrix}1&2&4&1\\0&1&3&3\\0&0&4&11\\0&0&0&3\end{bmatrix}$

$= -3\cdot 1\cdot 1\cdot 4\cdot 3 = -36$

4. Déterminer les valeurs du paramètre $k \in \mathbb{R}$ pour lesquels la matrice

$$A = \begin{bmatrix}4-k&2&-2\\-5&3-k&2\\-2&4&1-k\end{bmatrix}$$

n'est pas inversible

Rappel : A n'est pas inversible $\iff$ $\det(A) = 0$

Le calcul du déterminant nous donne :

$$\det(A) = \det\begin{bmatrix}4-k&2&-2\\-5&3-k&2\\-2&4&1-k\end{bmatrix} \underset{C_3\to C_3+C_2}{=} \det\begin{bmatrix}4-k&2&0\\-5&3-k&5-k\\-2&4&5-k\end{bmatrix}$$

$$\underset{L_2\to L_2-L_3}{=} \det\begin{bmatrix}4-k&2&0\\-3&-1-k&0\\-2&4&5-k\end{bmatrix} \underset{\text{dév. } C_3}{=} (5-k)\det\begin{bmatrix}4-k&2\\-3&-1-k\end{bmatrix}$$

$$= (5-k)\big[(4-k)(-1-k)-2(-3)\big] = (5-k)(k^2-3k+2)$$

$$= (5-k)(k-1)(k-2)$$

Par conséquent, A n'est pas inversible si et seulement si $k \in \{1,2,5\}$.

3.2. Règle de Cramer et volume

Notation. Soit $A = \begin{bmatrix} \vec{a}_1 \, \vec{a}_2 \cdots \vec{a}_n \end{bmatrix}$ une matrice de taille $n \times n$ avec colonnes $\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n \in \mathbb{R}^n$ et soit $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$ un vecteur quelconque. La matrice de taille $n \times n$ obtenue en remplaçant la colonne $\vec{a}_j$ de A par le vecteur $\vec{b}$ est notée $A_j(\vec{b})$:

$$A_j(\vec{b}) = \begin{bmatrix} \vec{a}_1 & \cdots & \vec{a}_{j-1} & \vec{b} & \vec{a}_{j+1} & \cdots & \vec{a}_n \end{bmatrix}.$$

Exemple

Si $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$, alors $A_3(\vec{b}) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 4 & 5 & 4 \\ 7 & 8 & 3 \end{bmatrix}$

Si $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ et $\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$, alors $I_2(\vec{x}) = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & 0 \\ 0 & x_2 & 0 \\ 0 & x_3 & 1 \end{bmatrix}$

Théorème (Règle de Cramer). Soit A une matrice inversible de taille $n \times n$ et $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$ un vecteur quelconque. L'unique solution $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ de l'équation $A\vec{x} = \vec{b}$ est telle que

$$x_j = \frac{\det\left(A_j(\vec{b})\right)}{\det(A)}, \qquad \text{avec } j = 1, 2, \ldots, n.$$

Preuve. Soit $I = \begin{bmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \cdots & \vec{e}_n \end{bmatrix}$ la matrice identité. Nous avons

$$\begin{aligned} A_j(\vec{b}) &= \begin{bmatrix} \vec{a}_1 & \cdots & \vec{a}_{j-1} & \vec{b} & \vec{a}_{j+1} & \cdots & \vec{a}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A\vec{e}_1 & \cdots & A\vec{e}_{j-1} & A\vec{x} & A\vec{e}_{j+1} & \cdots & A\vec{e}_n \end{bmatrix} \\ &= A\begin{bmatrix} \vec{e}_1 & \cdots & \vec{e}_{j-1} & \vec{x} & \vec{e}_{j+1} & \cdots & \vec{e}_n \end{bmatrix} = A\, I_j(\vec{x}) \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} \det\left(A_j(\vec{b})\right) &= \det\left(A\, I_j(\vec{x})\right) = \det(A)\det\left(I_j(\vec{x})\right) \\ &= \det(A)\, x_j. \end{aligned}$$

Comme par hypothèse la matrice A est inversible, nous trouvons

$$x_j = \frac{\det\left(A_j(\vec{b})\right)}{\det(A)}, \qquad \text{avec } j = 1, 2, \ldots, n. \qquad \blacksquare$$

Remarque. La règle de Cramer est utile, entre autres, pour étudier la dépendance de la solution du système $A\vec{x} = \vec{b}$ en fonction du vecteur $\vec{b}$. Par contre, elle n'est pas très pratique pour des calculs explicites (sauf éventuellement dans le cas où A est une matrice de taille 2×2 ou 3×3).

Exemple

Utiliser la règle de Cramer pour résoudre le système

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 2 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 1 \\ 5x_1 + 4x_2 - 6x_3 = 3 \end{cases}$$

Nous avons ici

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 3 & -1 & 2 \\ 5 & 4 & -6 \end{bmatrix} \qquad \text{et} \qquad \vec{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

d'où

$$A_1(\vec{b}) = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & -6 \end{bmatrix}, \quad A_2(\vec{b}) = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -5 \\ 3 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & -6 \end{bmatrix}, \quad A_3(\vec{b}) = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ 5 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

Le calcul des déterminants nous donne :

$$\det A = \det \begin{bmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 3 & -1 & 2 \\ 5 & 4 & -6 \end{bmatrix} \underset{\substack{C_1 \to C_1 + 3C_2 \\ C_3 \to C_3 + 2C_2}}{=} \det \begin{bmatrix} 11 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 17 & 4 & 2 \end{bmatrix} \underset{\text{dév. } L_2}{=} (-1) \det \begin{bmatrix} 11 & 1 \\ 17 & 2 \end{bmatrix} = -(22 - 17) = -5$$

$$\det A_1(\vec{b}) = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & -6 \end{bmatrix} \underset{\substack{C_1 \to C_1 + C_2 \\ C_3 \to C_3 + 2C_2}}{=} \det \begin{bmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 7 & 4 & 2 \end{bmatrix} \underset{\text{dév. } L_2}{=} (-1) \det \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 7 & 2 \end{bmatrix} = -(10 - 7) = -3$$

$$\det A_2(\vec{b}) = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -5 \\ 3 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & -6 \end{bmatrix} \underset{\substack{C_1 \to C_1 - 3C_2 \\ C_3 \to C_3 - 2C_2}}{=} \det \begin{bmatrix} -4 & 2 & -9 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & -12 \end{bmatrix} \underset{\text{dév. } L_2}{=} (1) \det \begin{bmatrix} -4 & -9 \\ -4 & -12 \end{bmatrix} = 48 - 36 = 12$$

$$\det A_3(\vec{b}) = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ 5 & 4 & 3 \end{bmatrix} \underset{\substack{C_1 \to C_1 + 3C_2 \\ C_3 \to C_3 + C_2}}{=} \det \begin{bmatrix} 11 & 3 & 5 \\ 0 & -1 & 0 \\ 17 & 4 & 7 \end{bmatrix} \underset{\text{dév. } L_2}{=} (-1) \det \begin{bmatrix} 11 & 5 \\ 17 & 7 \end{bmatrix} = -(77 - 85) = 8$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
x_1 &= \frac{\det\left(A_1(\vec{b})\right)}{\det(A)} = \frac{-3}{-5} = \frac{3}{5} \\
x_2 &= \frac{\det\left(A_2(\vec{b})\right)}{\det(A)} = \frac{12}{-5} = -\frac{12}{5} \\
x_3 &= \frac{\det\left(A_3(\vec{b})\right)}{\det(A)} = \frac{8}{-5} = -\frac{8}{5}
\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 3 \\ -12 \\ -8 \end{bmatrix}$$

Formule pour la matrice inverse

La règle de Cramer nous fournit aussi une formule pour le calcul de la matrice inverse.

Rappel. Soit $A = [a_{jk}]$ une matrice carrée de taille $n \times n$.
Le *cofacteur* (j,k) de A est le nombre

$$C_{jk} = (-1)^{j+k} \det(A_{jk}).$$

où A_{jk} est la matrice de taille $(n-1)\times(n-1)$ obtenue à partir de la matrice A en supprimant la j-ème ligne et la k-ème colonne :

$$A_{jk} = \begin{bmatrix} & \vdots & \\ \cdots & a_{jk} & \cdots \\ & \vdots & \end{bmatrix}$$

Définition. Soit A une matrice de taille $n \times n$. La matrice

$$\operatorname{cof}(A) = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & \cdots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & \cdots & C_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & C_{n3} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix}$$

est appelée la *matrice des cofacteurs de* A.
La transposée de cette matrice est appelée la *matrice adjointe de* A, notée $\operatorname{adj}(A)$:

$$\operatorname{adj}(A) = \left(\operatorname{cof}(A)\right)^T$$

Exemple

Soit $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 4 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \end{bmatrix}$

Déterminer la matrice des cofacteurs de A et la matrice adjointe de A.

Les cofacteurs de la matrice A sont

$$C_{11} = \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -4, \qquad C_{12} = -\begin{vmatrix} -3 & 0 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = -3, \qquad C_{13} = \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = -1,$$

$$C_{21} = -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 0, \qquad C_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = -1, \qquad C_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = -3,$$

$$C_{31} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = 0, \qquad C_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} = 0, \qquad C_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} = 4,$$

Par conséquent, la matrices des cofacteurs de A est $\mathrm{cof}(A) = \begin{bmatrix} -4 & -3 & -1 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

et la matrice adjointe de A, $\mathrm{adj}(A) = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & 0 \\ -1 & -3 & 4 \end{bmatrix}$

Théorème. Si A est une matrice inversible de taille $n \times n$ alors

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \mathrm{adj}(A).$$

Exemple

Calculer la matrice inverse de la matrice de l'exemple précédent :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 4 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \end{bmatrix}.$$

Comme

$$\det(A) = -4 \qquad \text{et} \qquad \mathrm{adj}(A) = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & 0 \\ -1 & -3 & 4 \end{bmatrix}$$

nous trouvons

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \mathrm{adj}(A) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3/4 & 1/4 & 0 \\ 1/4 & 3/4 & -1 \end{bmatrix}.$$

Remarque. L'importance du théorème précédent réside dans le fait que le coefficient situé à la j-ème ligne et la k-ème colonne de la matrice A^{-1} est

$$(A^{-1})_{jk} = \frac{C_{kj}}{\det(A)}\,.$$

Par conséquent, pour calculer un seul coefficient de la matrice inverse, il n'est pas nécessaire de calculer toute la matrice.

Exemple

(Série 5, exercice 4) Soit $B = A^{-1}$ l'inverse de la matrice $A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$.

Alors le coefficient b_{21} de la matrice B est égal à $b_{21} = \dfrac{C_{12}}{\det(A)}$.

Comme

$$C_{12} = -\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -4 \quad \text{et} \quad \det(A) = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix} \underset{\substack{\uparrow \\ C_2 \to C_2 - C_1}}{=} \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1$$

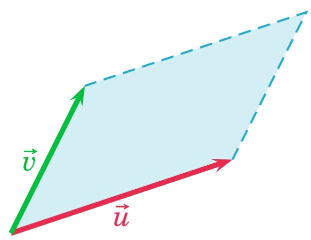
nous trouvons $b_{21} = \dfrac{-4}{1} = -4$.

Aire

Soient $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^2$ deux vecteurs du plan.

Le *parallélogramme engendré par les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$* est l'ensemble

$$\{\vec{w} \in \mathbb{R}^2 : \vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}\,, \text{avec } 0 \leqslant \alpha \leqslant 1 \text{ et } 0 \leqslant \beta \leqslant 1\}$$

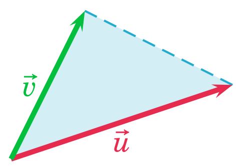


L'aire du parallélogramme engendré par les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est la valeur absolue du déterminant de la matrice $\begin{bmatrix} \vec{u} & \vec{v} \end{bmatrix}$:

$$\mathcal{A} = \left|\det\begin{bmatrix} \vec{u} & \vec{v} \end{bmatrix}\right|$$

Par extension, l'aire du triangle engendré par $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est

$$\mathcal{A}_\Delta = \frac{1}{2}\left|\det\begin{bmatrix} \vec{u} & \vec{v} \end{bmatrix}\right|$$



Volume

Soient $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$ trois vecteurs.

Le *parallélépipède engendré par les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$* est l'ensemble

$\{\vec{z} \in \mathbb{R}^3 : \vec{z} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w}$, avec $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, $0 \leqslant \beta \leqslant 1$ et $0 \leqslant \gamma \leqslant 1\}$

Le volume du parallélépipède engendré par $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ est la valeur absolue du déterminant de la matrice $\begin{bmatrix} \vec{u} & \vec{v} & \vec{w} \end{bmatrix}$:

$$\mathcal{V} = \left| \det \begin{bmatrix} \vec{u} & \vec{v} & \vec{w} \end{bmatrix} \right|$$