3. Déterminants

3.1. Définitions et propriétés

Définition.

- Le déterminant de la matrice $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_{2,2}(\mathbb{R})$ est le nombre

$$\det(A) = ad - bc\,.$$

- Le déterminant de la matrice $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \in M_{3,3}(\mathbb{R})$ est le nombre

$$\det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

Règle de Sarrus :

$$\begin{array}{cccccccc}
 & & & a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\
 & & & a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\
 & & & a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \\
- & - & - & & & + & + & +
\end{array}$$

Attention : La règle de Sarrus est uniquement valable pour des matrices de taille 3×3.

Nous pouvons réécrire le déterminant d'une matrice de taille 3×3 de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
\det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\
&\quad - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} \\
&= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) \\
&= a_{11}\det\begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} - a_{12}\det\begin{bmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix} + a_{13}\det\begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

En notant par A_{jk} la matrice de taille 2×2 obtenue en supprimant la j-ème ligne et la k-ème colonne de la matrice $A \in M_{3,3}(\mathbb{R})$:

$$A_{11} = \begin{bmatrix} \cancel{a_{11}} & \cancel{a_{12}} & \cancel{a_{13}} \\ \cancel{a_{21}} & a_{22} & a_{23} \\ \cancel{a_{31}} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \qquad A_{12} = \begin{bmatrix} \cancel{a_{11}} & \cancel{a_{12}} & \cancel{a_{13}} \\ a_{21} & \cancel{a_{22}} & a_{23} \\ a_{31} & \cancel{a_{32}} & a_{33} \end{bmatrix}, \qquad A_{13} = \begin{bmatrix} \cancel{a_{11}} & \cancel{a_{12}} & \cancel{a_{13}} \\ a_{21} & a_{22} & \cancel{a_{23}} \\ a_{31} & a_{32} & \cancel{a_{33}} \end{bmatrix},$$

la formule précédente s'écrit

$$\det(A) = a_{11}\det(A_{11}) - a_{12}\det(A_{12}) + a_{13}\det(A_{13}).$$

Exemple

$$\det\begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 2 & 4 & -6 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} = 1\underbrace{\det\begin{bmatrix} 4 & -6 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}}_{=4\cdot 0-3(-6)=18} - 5\underbrace{\det\begin{bmatrix} 2 & -6 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{=2\cdot 0-0(-6)=0} + 0\det\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = 18$$

Nous pouvons maintenant donner une définition récursive du déterminant d'une matrice carrée quelconque :

Définition. Soit $A = [a_{jk}]$ une matrice carrée de taille $n \times n$.

Le *déterminant* de A est le nombre

$$\begin{aligned} \det(A) &= a_{11}\det(A_{11}) - a_{12}\det(A_{12}) + a_{13}\det(A_{13}) - a_{14}\det(A_{14}) + \ldots + (-1)^{1+n}a_{1n}\det(A_{1n}) \\ &= \sum_{k=1}^{n}(-1)^{1+k}a_{1k}\det(A_{1k}), \end{aligned}$$

où A_{jk} est la matrice de taille $(n-1)\times(n-1)$ obtenue à partir de la matrice A en supprimant la j-ème ligne et la k-ème colonne :

$$A_{jk} = \begin{bmatrix} & \vdots & \\ \cdots & a_{jk} & \cdots \\ & \vdots & \end{bmatrix}$$

Notation. Parfois on utilise la notation $|A|$ pour le déterminant de A.

Définition. Soit $A = [a_{jk}]$ une matrice carrée de taille $n \times n$.

Le *cofacteur* (j,k) de A est le nombre

$$C_{jk} = (-1)^{j+k} \det(A_{jk}).$$

En utilisant les cofacteurs, le déterminant de la matrice A devient

$$\det(A) = a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + a_{13}C_{13} + a_{14}C_{14} + \ldots + a_{1n}C_{1n} = \sum_{k=1}^{n} a_{1k}C_{1k}.$$

Théorème (développement par rapport à la j-ème ligne).

Soit $A = [a_{jk}]$ une matrice carrée de taille $n \times n$. Nous avons

$$\begin{aligned}\det(A) &= (-1)^{j+1} a_{j1} \det(A_{j1}) + (-1)^{j+2} a_{j2} \det(A_{j2}) + \ldots + (-1)^{j+n} a_{jn} \det(A_{jn}) \\ &= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{j+k} a_{jk} \det(A_{jk}),\end{aligned}$$

ou encore

$$\det(A) = a_{j1}C_{j1} + a_{j2}C_{j2} + a_{j3}C_{j3} + a_{j4}C_{j4} + \ldots + a_{jn}C_{jn} = \sum_{k=1}^{n} a_{jk}C_{jk}.$$

Exemples

Développement par rapport à la deuxième ligne :

$$\det\begin{bmatrix}1 & 5 & 0\\ 2 & 4 & -6\\ 0 & 3 & 0\end{bmatrix} \underset{\text{dév. } L_2}{=} 2(-1)^{2+1}\underbrace{\det\begin{bmatrix}5 & 0\\ 3 & 0\end{bmatrix}}_{=0} + 4(-1)^{2+2}\underbrace{\det\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}}_{=0} + (-6)(-1)^{2+3}\underbrace{\det\begin{bmatrix}1 & 5\\ 0 & 3\end{bmatrix}}_{=3}$$

$$= 18$$

Développement par rapport à la troisième ligne :

$$\det\begin{bmatrix}1 & 5 & 0\\ 2 & 4 & -6\\ 0 & 3 & 0\end{bmatrix} \underset{\text{dév. } L_3}{=} +0(-1)^{3+1}\det\begin{bmatrix}5 & 0\\ 4 & -6\end{bmatrix} + 3(-1)^{3+2}\underbrace{\det\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & -6\end{bmatrix}}_{=-6} + 0(-1)^{3+3}\det\begin{bmatrix}1 & 5\\ 2 & 4\end{bmatrix}$$

$$= 18$$

Remarques.

- Pour calculer le déterminant d'une matrice de taille 4×4, il faut donc calculer quatre déterminants de matrices de taille 3×3 et pour chacun de ceux-ci, il faut calculer trois déterminants de matrices de taille 2×2. Pour calculer le déterminant d'une matrice de taille 5×5, il faut calculer $5\cdot4\cdot3 = 60$ déterminants et ainsi de suite. Nous avons donc intérêt à trouver une méthode qui demande moins de calculs.
- Le théorème est utile dans le cas où le développement se fait par rapport à une ligne qui contient beaucoup de zéros. En particulier, si la matrice A contient une ligne formée de zéros, alors son déterminant est nul :
$$\det(A) = 0\,.$$

Théorème. Si $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ est une matrice triangulaire (supérieure ou inférieure) alors :

$$\det(A) = a_{11}a_{22}a_{33}\cdots a_{nn}.$$

Preuve. Supposons que A est une matrice triangulaire inférieure. Le calcul nous donne :

$$\begin{aligned}
\det\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} &\underset{\text{dév. } L_1}{=} a_{11}\det\begin{bmatrix} a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \underset{\text{dév. } L_1}{=} a_{11}a_{22}\det\begin{bmatrix} a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \\
&= \ldots = a_{11}a_{22}\cdots a_{n-2,n-2}\det\begin{bmatrix} a_{n-1,n-1} & 0 \\ a_{n,n-1} & a_{nn} \end{bmatrix} \\
&= a_{11}a_{22}\cdots a_{n-1,n-1}a_{nn}.
\end{aligned}$$

Le calcul est analogue dans le cas où A est une matrice triangulaire supérieure :

$$\begin{aligned}
\det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} &\underset{\text{dév. } L_n}{=} (-1)^{n+n}a_{nn}\det\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{n-1,n-1} \end{bmatrix} \\
&= \ldots = a_{nn}\cdots a_{22}a_{11}
\end{aligned}$$

■

Idée : Pour calculer le déterminant d'une matrice, nous pouvons l'échelonner.

Question. Quels sont les effets des opérations élémentaires sur les lignes lors du calcul du déterminant ?

Théorème. Soient A et C deux matrices carrées de taille $n \times n$.

a) Si $A \underset{L_j \leftrightarrow L_k}{\frown} C$ alors $\det(C) = -\det(A)$.

b) Si $A \underset{L_j \to \lambda L_j}{\frown} C$ (avec $\lambda \neq 0$) alors $\det(C) = \lambda \det(A)$ ou $\det(A) = \frac{1}{\lambda} \det(C)$.

c) Si $A \underset{L_j \to L_j + \lambda L_k}{\frown} C$ alors $\det(C) = \det(A)$.

Vérification dans le cas $n = 2$:

Soit $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. Nous avons $\det(A) = ad - bc$ et

a) $\det \begin{bmatrix} c & d \\ a & b \end{bmatrix} = cb - ad = -\det(A)$.

b) $\det \begin{bmatrix} \lambda a & \lambda b \\ c & d \end{bmatrix} = \lambda ad - \lambda bc = \lambda(ad - bc) = \lambda \det(A)$.

c) $\det \begin{bmatrix} a + \lambda c & b + \lambda d \\ c & d \end{bmatrix} = (a + \lambda c)d - (b + \lambda d)c = ad - bc = \det(A)$.

Corollaire. Soit A une matrice carrée de taille $n \times n$ et soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors

$$\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A).$$

Preuve. Le calcul nous donne

$$\det(\lambda A) = \det \begin{bmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{n1} & \lambda a_{n2} & \cdots & \lambda a_{nn} \end{bmatrix} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{facteur } \lambda \text{ de } L_1}}{=} \lambda \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{n1} & \lambda a_{n2} & \cdots & \lambda a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{facteur } \lambda \text{ de } L_2}}{=} \lambda^2 \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{n1} & \lambda a_{n2} & \cdots & \lambda a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$= \ldots \underset{\substack{\uparrow \\ \text{facteur } \lambda \text{ de } L_n}}{=} \lambda^n \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = \lambda^n \det(A)$$

$\blacksquare$

Théorème. Soient A et B deux matrices carrées de taille $n \times n$ à coefficients dans $\mathbb{R}$. Alors

$$\det(AB) = (\det A)(\det B).$$

Vérification dans le cas $n = 2$:

Soient $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}$. Nous avons

$$\begin{aligned}
\det(AB) &= \det \begin{bmatrix} ae + bg & af + bh \\ ce + dg & cf + dh \end{bmatrix} \\
&= (ae + bg)(cf + dh) - (af + bh)(ce + dg) \\
&= eh(ad - bc) - fg(ad - bc) \\
&= (ad - bc)(eh - fg) \\
&= (\det A)(\det B).
\end{aligned}$$

Remarque. Même si $AB \neq BA$ en général, nous avons toujours

$$\det(AB) = \det(BA).$$

Théorème. Soit A une matrice carrée de taille $n \times n$. Alors nous avons l'équivalence

$$A \text{ est inversible} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \det(A) \neq 0$$

Preuve.

$\Rightarrow$) Si A est inversible, alors il existe une matrice $A^{-1} \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ telle que

$$AA^{-1} = I_n = A^{-1}A\,.$$

Comme

$$\det(AA^{-1}) = \det(I_n) = 1 \qquad \Longrightarrow \qquad \det(A)\det(A^{-1}) = 1\,,$$

nous trouvons $\det(A) \neq 0$.

$\Leftarrow$) Supposons que A n'est pas inversible. A voir : $\det(A) = 0$.
Le théorème des matrices inversibles nous dit que A ne possède pas n positions pivot et de ce fait, la matrice échelonnée–réduite associée à la matrice A contient des lignes formées de zéros, d'où le résultat. ■

Corollaire. Si la matrice A est inversible alors

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}\,.$$

Remarque. Le théorème précédent est particulièrement utile pour déterminer si une matrice est inversible *avant* de commencer le calcul de la matrice inverse.

Exemples

Reprenons deux matrices vues précédemment :

1. Comme $\det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \underset{\text{dév. } L_1}{=} 1 \cdot \underbrace{\det \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}}_{=2-0=2} - 0 + 1 \cdot \underbrace{\det \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}_{=0-1=-1} = 2 - 1 = 1 \neq 0,$

   la matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ est inversible (ce que nous savions déjà).

2. Comme $\det \begin{bmatrix} 0 & 3 & -5 \\ 1 & 0 & 2 \\ -4 & -9 & 7 \end{bmatrix} \underset{\text{dév. } L_1}{=} 0 - 3 \cdot \underbrace{\det \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -4 & 7 \end{bmatrix}}_{=7+8=15} + (-5) \cdot \underbrace{\det \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 9 \end{bmatrix}}_{=-9} = -45 + 45 = 0,$

   la matrice $A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -5 \\ 1 & 0 & 2 \\ -4 & -9 & 7 \end{bmatrix}$ n'est pas inversible (ce que nous savions déjà).

Théorème. Soit $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ une matrice inversible de taille 2×2. Nous avons

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \frac{1}{\det(A)}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

Preuve. Supposons que $a \neq 0$. Le calcul nous donne

$$\left[\begin{array}{cc|cc} a & b & 1 & 0 \\ c & d & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{L_2\to aL_2}{\widetilde{\qquad}} \left[\begin{array}{cc|cc} a & b & 1 & 0 \\ ac & ad & 0 & a \end{array}\right] \underset{L_2\to L_2-cL_1}{\widetilde{\qquad}} \left[\begin{array}{cc|cc} a & b & 1 & 0 \\ 0 & ad-bc & -c & a \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|cc} a & b & 1 & 0 \\ 0 & |A| & -c & a \end{array}\right]$$

$$\underset{L_1\to |A|L_1}{\widetilde{\qquad}} = \left[\begin{array}{cc|cc} a|A| & b|A| & |A| & 0 \\ 0 & |A| & -c & a \end{array}\right] \underset{L_1\to L_1-bL_2}{\widetilde{\qquad}} \left[\begin{array}{cc|cc} a|A| & 0 & ad & -ab \\ 0 & |A| & -c & a \end{array}\right]$$

et nous trouvons le résultat en divisant L_1 par $a|A| \neq 0$ et L_2 par $|A| \neq 0$.

Supposons maintenant que $a = 0$. Comme A est inversible, il faut que $b \neq 0$ et $c \neq 0$. D'où

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 0 & b & 1 & 0 \\ c & d & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{L_1\leftrightarrow L_2}{\widetilde{\qquad}} \left[\begin{array}{cc|cc} c & d & 0 & 1 \\ 0 & b & 1 & 0 \end{array}\right] \underset{L_1\to -bL_1}{\widetilde{\qquad}} \left[\begin{array}{cc|cc} -bc & -bd & 0 & -b \\ 0 & b & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\underset{L_1\to L_1+dL_2}{\widetilde{\qquad}} \left[\begin{array}{cc|cc} -bc & 0 & d & -b \\ 0 & b & 1 & 0 \end{array}\right] \underset{L_2\to -cL_2}{\widetilde{\qquad}} \left[\begin{array}{cc|cc} -bc & 0 & d & -b \\ 0 & -bc & -c & 0 \end{array}\right]$$

et nous trouvons le résultat en divisant les lignes L_1 et L_2 par $|A| = -bc \neq 0$. ■

Théorème. Soit A une matrice carrée de taille $n \times n$ et A^T sa matrice transposée.
Nous avons

$$\det(A^T) = \det(A).$$

Vérification dans le cas $n = 2$:

Nous avons $\quad \det \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = ad - bc = \det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$

Conséquence. Nous pouvons remplacer le mot « ligne » par le mot « colonne » dans tous les résultats concernant le calcul du déterminant. Par exemple :

- Si la matrice A possède une colonne formée de zéros alors $\det(A) = 0$.
- Nous pouvons faire un développement par rapport à la k-ème colonne :

$$\begin{aligned} \det(A) &= (-1)^{1+k} a_{1k} \det(A_{1k}) + (-1)^{2+k} a_{2k} \det(A_{2k}) + \ldots + (-1)^{n+k} a_{nk} \det(A_{nk}) \\ &= a_{1k} C_{1k} + a_{2k} C_{2k} + \ldots + a_{nk} C_{nk}. \end{aligned}$$

- Nous pouvons faire des opérations élémentaires sur les colonnes pour introduire des zéros dans la matrice.

Calcul du déterminant

Pour calculer un déterminant nous pouvons :

- développer par rapport à une ligne (ou à une colonne),
- faire des opérations élémentaires sur les lignes (ou les colonnes),
- combiner les deux.

Exemples

Calculer les déterminants suivants :

1. $$\det\begin{bmatrix}3&2&1\\2&4&5\\1&0&2\end{bmatrix} \underset{\text{dév. } L_3}{=} 1\cdot\underbrace{\det\begin{bmatrix}2&1\\4&5\end{bmatrix}}_{=10-4=6} -0\cdot\det\begin{bmatrix}3&1\\2&5\end{bmatrix} +2\cdot\underbrace{\det\begin{bmatrix}3&2\\2&4\end{bmatrix}}_{=12-4=8} = 1\cdot 6+2\cdot 8 = 22$$

Calculs alternatifs :

$$\det\begin{bmatrix}3&2&1\\2&4&5\\1&0&2\end{bmatrix} \underset{C_3\to C_3-2C_1}{=} \det\begin{bmatrix}3&2&-5\\2&4&1\\1&0&0\end{bmatrix} \underset{\text{dév. } L_3}{=} 1\cdot\underbrace{\det\begin{bmatrix}2&-5\\4&1\end{bmatrix}}_{=2-(-20)=22} -0+0 = 22$$

$$\det\begin{bmatrix}3&2&1\\2&4&5\\1&0&2\end{bmatrix} \underset{L_1\leftrightarrow L_3}{=} -\det\begin{bmatrix}1&0&2\\2&4&5\\3&2&1\end{bmatrix} \underset{\substack{L_2\to L_2-2L_1\\ L_3\to L_3-3L_1}}{=} -\det\begin{bmatrix}1&0&2\\0&4&1\\0&2&-5\end{bmatrix} \underset{\text{dév. } C_1}{=} -1\cdot\underbrace{\det\begin{bmatrix}4&1\\2&-5\end{bmatrix}}_{=-20-2=-22} = 22$$

$$\det\begin{bmatrix}3&2&1\\2&4&5\\1&0&2\end{bmatrix} = \cdots = -\det\begin{bmatrix}1&0&2\\0&4&1\\0&2&-5\end{bmatrix} \underset{L_3\to L_3-\frac{1}{2}L_2}{=} -\det\begin{bmatrix}1&0&2\\0&4&1\\0&0&-\frac{11}{2}\end{bmatrix} = -1\cdot 4\cdot\left(-\frac{11}{2}\right) = 22$$

2. $$\det\begin{bmatrix}1&0&0&3\\2&7&0&6\\0&6&3&0\\7&3&1&1\end{bmatrix} \underset{C_4\to C_4-3C_1}{=} \det\begin{bmatrix}1&0&0&0\\2&7&0&0\\0&6&3&0\\7&3&1&-20\end{bmatrix} = 1\cdot 7\cdot 3\cdot(-20) = -420$$

3. $$\det\begin{bmatrix}1&2&1&4\\0&3&9&9\\2&0&1&0\\1&1&1&1\end{bmatrix} \underset{\substack{L_3\to L_3-2L_1\\ L_4\to L_4-L_1}}{=} \det\begin{bmatrix}1&2&1&4\\0&3&9&9\\0&-4&-1&-8\\0&-1&0&-3\end{bmatrix} \underset{\text{facteur } 3 \text{ de } L_2}{=} 3\cdot\det\begin{bmatrix}1&2&1&4\\0&1&3&3\\0&-4&-1&-8\\0&-1&0&-3\end{bmatrix}$$

$$\underset{\substack{L_3\to L_3+4L_2\\ L_4\to L_4+L_2}}{=} 3\cdot\det\begin{bmatrix}1&2&1&4\\0&1&3&3\\0&0&11&4\\0&0&3&0\end{bmatrix} \underset{C_3\leftrightarrow C_4}{=} -3\cdot\det\begin{bmatrix}1&2&4&1\\0&1&3&3\\0&0&4&11\\0&0&0&3\end{bmatrix}$$

$$= -3\cdot 1\cdot 1\cdot 4\cdot 3 = -36$$