
2. Calcul matriciel

2.1. Opérations matricielles

Définition. Une *matrice* de taille $m \times n$ est un tableau rectangulaire de mn nombres réels disposés sur m lignes et n colonnes. Les éléments de la matrice sont appelés *coefficients* (ou *éléments*) de la matrice.

Nous utilisons des lettres majuscules pour noter les matrices :

$$A, B, \dots$$

et des lettres minuscules pour les coefficients :

a_{jk} est le coefficient de la matrice A situé à la j -ème ligne et la k -ème colonne.

Une matrice de taille $m \times n$ a la forme générale suivante :

$$A = \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}}_{n \text{ colonnes}} \left. \vphantom{\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}} \right\} m \text{ lignes}$$

Notation : L'ensemble des matrices de taille $m \times n$ à coefficients dans $\mathbb{R}$ est noté $M_{m,n}(\mathbb{R})$.

De plus, nous utilisons parfois la notation

$$A = [a_{jk}]$$

plutôt que

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Nous utilisons aussi la notation

$$A = [\vec{a}_1 \quad \vec{a}_2 \quad \cdots \quad \vec{a}_n]$$

où

$$\vec{a}_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}, \vec{a}_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix}, \dots, \vec{a}_n = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix},$$

sont les n colonnes de la matrice A .

Cas particuliers

- *Matrice nulle*, notée $O \in M_{m,n}(\mathbb{R})$, telle que tous ses coefficients sont nuls :

$$O = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}.$$

- *Matrice carrée*, si la matrice a le même nombre de lignes et de colonnes : $m = n$.
- *Matrice diagonale* : matrice carrée telle que $a_{jk} = 0$ si $j \neq k$:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

- *Matrice identité* ou *matrice unité*, notée $I_n \in M_{n,n}(\mathbb{R})$: matrice diagonale telle que $a_{jj} = 1$ pour tout $j = 1, 2, \dots, n$:

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}.$$

- *Matrice triangulaire supérieure* : matrice carrée telle que tous les coefficients au-dessous de la diagonale principale sont nuls :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

- *Matrice triangulaire inférieure* : matrice carrée telle que tous les coefficients au-dessus de la diagonale principale sont nuls :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Opérations

Somme de matrices :

Soient $A = [a_{jk}]$ et $B = [b_{jk}]$ deux matrices de taille $m \times n$. La somme des matrices A et B , notée $A + B$, est la matrice de taille $m \times n$ donnée par :

$$A + B = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{bmatrix}.$$

Attention : La somme de matrices n'est pas définie si les matrices n'ont pas la même taille.

Exemple

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 4 & 0 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+5 & 2-2 \\ 3+4 & 4+0 \\ 5-3 & 6+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 7 & 4 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}$$

Produit d'une matrice par un scalaire¹ :

Soit $A = [a_{jk}]$ une matrice de taille $m \times n$ et soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Le produit de la matrice A par le scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$ est la matrice de taille $m \times n$, notée λA , donnée par

$$\lambda A = \lambda \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda a_{11} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{bmatrix}$$

Exemple

$$5 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \cdot 1 & 5 \cdot 2 \\ 5 \cdot 3 & 5 \cdot 4 \\ 5 \cdot 5 & 5 \cdot 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 10 \\ 15 & 20 \\ 25 & 30 \end{bmatrix}$$

1. Pour les physiciens, un scalaire est une quantité physique qui ne comporte qu'une grandeur. Pour les mathématiciens, un scalaire est un nombre.

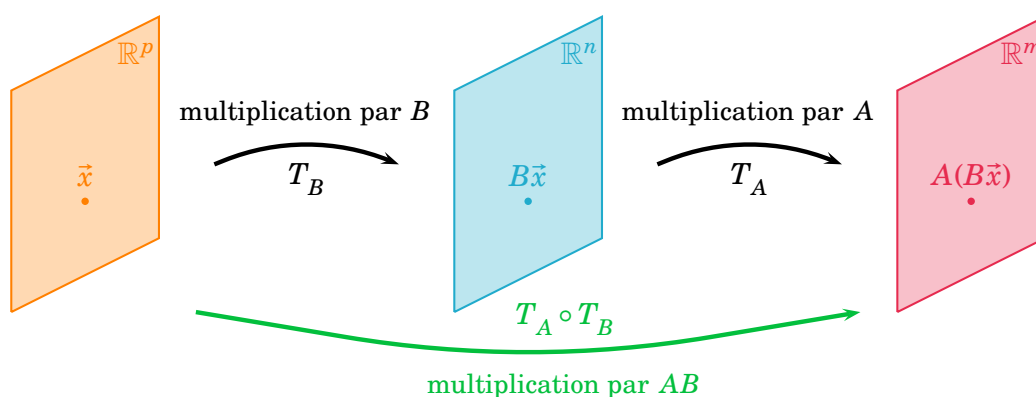
Théorème. Soient A , B et C des matrices de même taille et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ des scalaires.

- a) $A + B = B + A$ (commutativité de l'addition)
- b) $A + (B + C) = (A + B) + C$ (associativité de l'addition)
- c) $A + O = A$ (élément neutre pour l'addition)
- d) $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$
- e) $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$
- f) $\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$

Multiplication matricielle :

Soit A une matrice de taille $m \times n$ et soit $T_A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ l'application linéaire associée.

Soit B une matrice de taille $n \times p$ et soit $T_B: \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^n$ l'application linéaire associée.



Par construction, l'image d'un vecteur $\vec{x} \in \mathbb{R}^p$ par la composition $T_A \circ T_B: \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^m$ est

$$(T_A \circ T_B)(\vec{x}) = T_A(T_B(\vec{x})) = T_A(B\vec{x}) = A(B\vec{x}).$$

La matrice de taille $m \times p$ canoniquement associée à la composition $T_A \circ T_B: \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^m$ est appelée *matrice produit de A et B*, notée AB . Nous avons donc

$$(AB)\vec{x} = A(B\vec{x}), \quad \text{pour tout } \vec{x} \in \mathbb{R}^p.$$

Comme

$$B = \begin{bmatrix} b_1 & \vec{b}_2 & \cdots & \vec{b}_p \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad B\vec{x} = x_1\vec{b}_1 + x_2\vec{b}_2 + \dots + x_p\vec{b}_p,$$

nous avons

$$\begin{aligned} (AB)\vec{x} &= A(B\vec{x}) \\ &= A(x_1\vec{b}_1 + x_2\vec{b}_2 + \dots + x_p\vec{b}_p) \\ &= x_1(A\vec{b}_1) + x_2(A\vec{b}_2) + \dots + x_p(A\vec{b}_p) \\ &= \begin{bmatrix} A\vec{b}_1 & A\vec{b}_2 & \cdots & A\vec{b}_p \end{bmatrix} \vec{x}, \quad \text{pour tout } \vec{x} \in \mathbb{R}^p. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$AB = \begin{bmatrix} A\vec{b}_1 & A\vec{b}_2 & \cdots & A\vec{b}_p \end{bmatrix}.$$

Autrement dit,

$$A \begin{bmatrix} \vec{b}_1 & \vec{b}_2 & \cdots & \vec{b}_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A\vec{b}_1 & A\vec{b}_2 & \cdots & A\vec{b}_p \end{bmatrix}.$$

Exemple

$$\text{Considérons } A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 1 & 0 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{bmatrix} \vec{b}_1 & \vec{b}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}.$$

Nous avons

$$\begin{aligned} A\vec{b}_1 &= \begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 1 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = 1 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} -4 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 16 \end{bmatrix} \\ A\vec{b}_2 &= \begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 1 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} = 4 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + 5 \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} + 6 \begin{bmatrix} -4 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 34 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

d'où

$$AB = \begin{bmatrix} A\vec{b}_1 & A\vec{b}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -1 \\ 16 & 34 \end{bmatrix}$$

Règle « ligne-colonne » du produit matriciel :

Soient

$$\begin{aligned} A &= [a_{jk}] \in M_{m,n}(\mathbb{R}), & \text{avec } 1 \leq j \leq m \text{ et } 1 \leq k \leq n, \\ B &= [b_{k\ell}] \in M_{n,p}(\mathbb{R}), & \text{avec } 1 \leq k \leq n \text{ et } 1 \leq \ell \leq p. \end{aligned}$$

Le produit des matrices A et B , noté AB , est la matrice de taille $m \times p$ dont les coefficients sont donnés par :

$$c_{j\ell} = a_{j1}b_{1\ell} + a_{j2}b_{2\ell} + a_{j3}b_{3\ell} + \dots + a_{jn}b_{n\ell} = \sum_{k=1}^n a_{jk}b_{k\ell}$$

Ainsi, le coefficient $c_{j\ell}$ est égal au produit scalaire de la j -ème ligne de A avec la ℓ -ème colonne de B :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & \cdots & b_{2p} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & \cdots & b_{3p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & b_{n3} & \cdots & b_{np} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & \cdots & c_{1p} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & \cdots & c_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & c_{m3} & \cdots & c_{mp} \end{bmatrix}.$$

Attention : le produit de A et B n'est pas défini si le nombre de colonnes de A n'est pas égal au nombre de lignes de B .

Exemple

Si $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 1 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$, alors

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 1 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + (-4) \cdot 3 & 2 \cdot 4 + 3 \cdot 5 + (-4) \cdot 6 \\ 1 \cdot 1 + 0 \cdot 2 + 5 \cdot 3 & 1 \cdot 4 + 0 \cdot 5 + 5 \cdot 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -1 \\ 16 & 34 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 1 & 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 2 + 4 \cdot 1 & 1 \cdot 3 + 4 \cdot 0 & 1 \cdot (-4) + 4 \cdot 5 \\ 2 \cdot 2 + 5 \cdot 1 & 2 \cdot 3 + 5 \cdot 0 & 2 \cdot (-4) + 5 \cdot 5 \\ 3 \cdot 2 + 6 \cdot 1 & 3 \cdot 3 + 6 \cdot 0 & 3 \cdot (-4) + 6 \cdot 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 3 & 16 \\ 9 & 6 & 17 \\ 12 & 9 & 18 \end{bmatrix}$$

Remarque. Il est toujours possible de multiplier des matrices carrées de même taille.

Attention : Même si les produits AB et BA sont définis, en général nous avons

$$AB \neq BA.$$

Par exemple, si

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

alors nous avons

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad BA = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \neq AB$$

De plus, nous remarquons qu'il est possible d'avoir un produit de deux matrices non nulles qui est égal à la matrice nulle :

$$AB = O \quad \text{avec } A \neq O \text{ et } B \neq O.$$

Puissance d'une matrice :

Les puissances entières non négatives d'une matrice carrée A sont définies comme suit :

$$A^0 = I, \quad A^1 = A, \quad A^2 = AA, \quad A^k = \underbrace{AA \cdots A}_{k \text{ fois}}$$

Théorème. Soit A une matrice de taille $m \times n$, et B et C deux matrices telles que les sommes et les produits ci-dessous aient un sens.

- a)** $A(BC) = (AB)C$ (associativité du produit)
- b)** $A(B + C) = AB + AC$ (distributivité à gauche)
- c)** $(B + C)A = BA + CA$ (distributivité à droite)
- d)** $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$
- e)** $I_m A = A = A I_n$ (élément neutre pour la multiplication)

Preuve.

- a)** Soient B une matrice de taille $n \times p$ et C une matrice de taille $p \times q$. Par définition,

$$BC = B \begin{bmatrix} \vec{c}_1 & \vec{c}_2 & \cdots & \vec{c}_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B\vec{c}_1 & B\vec{c}_2 & \cdots & B\vec{c}_q \end{bmatrix}$$

d'où

$$\begin{aligned} A(BC) &= A \begin{bmatrix} B\vec{c}_1 & B\vec{c}_2 & \cdots & B\vec{c}_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A(B\vec{c}_1) & A(B\vec{c}_2) & \cdots & A(B\vec{c}_q) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (AB)\vec{c}_1 & (AB)\vec{c}_2 & \cdots & (AB)\vec{c}_q \end{bmatrix} = (AB) \begin{bmatrix} \vec{c}_1 & \vec{c}_2 & \cdots & \vec{c}_q \end{bmatrix} \\ &= (AB)C \end{aligned}$$

- b) – e)** À faire (voir exercice 9 de la série 5). ■

Transposée d'une matrice

Définition. Soit A une matrice de taille $m \times n$. On définit la *matrice transposée de A* , notée A^T comme la matrice de taille $n \times m$ dont les colonnes sont les lignes de A .

Exemple

$$\text{Si } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \text{ alors } A^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

Théorème. Soient A et B deux matrices telles que les sommes et les produits ci-dessous aient un sens.

- a) $(A^T)^T = A$
- b) $(A + B)^T = A^T + B^T$
- c) $(\lambda A)^T = \lambda A^T$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$
- d) $(AB)^T = B^T A^T$

Preuve.

a) – c) Conséquence directe de la définition.

d) À faire (voir exercice 9 de la série 5). ■

Définition. Soit A une matrice carrée de taille $n \times n$.

On dit que A est *symétrique* si $A^T = A$.

On dit que A est *antisymétrique* si $A^T = -A$.

Exemple

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \text{ est symétrique et } A = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \text{ est antisymétrique.}$$

2.2. Matrices inversibles

Définition. Une matrice carrée $A = [a_{jk}] \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ est *inversible* s'il existe une matrice carrée $B = [b_{jk}] \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ telle que

$$AB = I_n \quad \text{et} \quad BA = I_n$$

où

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

est la matrice identité de $M_{n,n}(\mathbb{R})$.

Remarque. Si A est une matrice inversible, alors la matrice B de la définition est unique. En effet, si B et C sont deux matrices telles que $AB = I_n = BA$ et $AC = I_n = CA$ alors

$$\left. \begin{array}{l} C(AB) = CI_n = C \\ (CA)B = I_nB = B \end{array} \right\} \implies B = C$$

Définition. L'unique matrice de taille $n \times n$, notée A^{-1} , telle que

$$AA^{-1} = I_n \quad \text{et} \quad A^{-1}A = I_n$$

est appelée *matrice inverse de A* .

Proposition. Si $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ est inversible alors $A^{-1} \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ est aussi inversible et

$$(A^{-1})^{-1} = A.$$

Preuve. Par définition, $AA^{-1} = I_n$ et $A^{-1}A = I_n$ et de ce fait, A est l'inverse de A^{-1} . ■

Proposition. Si $A, B \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ sont deux matrices inversibles, alors

$$AB \in M_{n,n}(\mathbb{R}) \text{ est inversible} \quad \text{et} \quad (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

Preuve. Nous avons

$$AB(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AI_nA^{-1} = AA^{-1} = I_n$$

$$(B^{-1}A^{-1})AB = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}I_nB = B^{-1}B = I_n$$

■

Proposition. Si $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ est une matrice inversible et $\lambda \in \mathbb{R}$ est tel que $\lambda \neq 0$, alors

$$\lambda A \in M_{n,n}(\mathbb{R}) \text{ est inversible} \quad \text{et} \quad (\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda} A^{-1}.$$

Preuve. Nous avons

$$\lambda A \left(\frac{1}{\lambda} A^{-1} \right) = \lambda \frac{1}{\lambda} (AA^{-1}) = I_n$$

$$\left(\frac{1}{\lambda} A^{-1} \right) \lambda A = \frac{1}{\lambda} \lambda (A^{-1}A) = I_n$$

■

Question. Comment déterminer si A est inversible?

Exemple

Déterminer si $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}$ est inversible. Si oui, calculer A^{-1} .

Nous cherchons une matrice $A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ telle que $AA^{-1} = I_2$ et $A^{-1}A = I_2$.

Nous avons

$$AA^{-1} = I_2 \iff \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \iff \begin{bmatrix} a+4c & b+4d \\ -a-3c & -b-3d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Nous devons résoudre deux systèmes :

$$\begin{cases} a+4c = 1 \\ -a-3c = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} b+4d = 0 \\ -b-3d = 1 \end{cases}$$

La réduction des matrices augmentées associées aux deux systèmes nous donne :

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 4 & 1 \\ -1 & -3 & 0 \end{array} \right] &\xrightarrow{L_2 \rightarrow L_2 + L_1} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{L_1 \rightarrow L_1 - 4L_2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{array} \right] \implies \begin{cases} a = -3 \\ c = 1 \end{cases} \\ \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 4 & 0 \\ -1 & -3 & 1 \end{array} \right] &\xrightarrow{L_2 \rightarrow L_2 + L_1} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{L_1 \rightarrow L_1 - 4L_2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 1 \end{array} \right] \implies \begin{cases} b = -4 \\ d = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Par conséquent, la matrice A est inversible et nous avons

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & -4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Vérification :

$$\begin{aligned} AA^{-1} &= \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & -4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3+4 & -4+4 \\ 3-3 & 4-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ A^{-1}A &= \begin{bmatrix} -3 & -4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3+4 & -12+12 \\ 1-1 & 4-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Idée : Résoudre les deux systèmes en même temps :

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 4 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{L_2 \rightarrow L_2 + L_1} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{L_1 \rightarrow L_1 - 4L_2} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right]$$

Constat : La réduction de Gauss-Jordan de la matrice $[A \mid I_2]$ nous donne dans ce cas la matrice $[I_2 \mid A^{-1}]$.

Nous verrons plus tard que lorsque A est une matrice inversible de taille $n \times n$ quelconque, la matrice inverse A^{-1} peut être calculée exactement de la même manière :

$$[A \mid I_n] \rightsquigarrow [I_n \mid A^{-1}]$$

Cas particulier

Si $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, alors nous distinguons deux cas :

- Si $ad - bc \neq 0$, alors la matrice A est inversible et nous avons une formule explicite pour calculer l'inverse :

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

- Si $ad - bc = 0$, alors la matrice A n'est pas inversible.

Le nombre $ad - bc$ «détermine» donc si la matrice A est inversible ou pas ! Ce nombre est appelé le **déterminant** de la matrice A , noté $\det(A)$.

Nous verrons au Chapitre 3 comment définir le déterminant pour des matrices carrées de taille $n \times n$ avec $n \geq 3$.

Matrices élémentaires.

Rappel.

Nous avons vu qu'il y a trois types d'opérations élémentaires (sur les lignes d'une matrice) :

- Type I : échanger deux lignes :

$$L_j \leftrightarrow L_k$$

- Type II : multiplier une ligne par un nombre **non-nul** :

$$L_j \rightarrow \lambda L_j, \text{ avec } \lambda \neq 0$$

- Type III : additionner un multiple d'une ligne à une autre :

$$L_k \rightarrow L_k + \lambda L_j, \text{ avec } j \neq k \text{ et } \lambda \in \mathbb{R}$$

Définition.

Une matrice carrée de taille $n \times n$ est une **matrice élémentaire** si elle peut être obtenue à partir de la matrice identité I_n à l'aide d'une **seule** opération élémentaire sur les lignes.

Par conséquent, il y a trois types de matrice élémentaire.

Illustration ($n=2$)

• Type I: $E_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ car $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

• Type II: $E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}$ car $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 \rightarrow 7L_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}$

• Type III: $E_3 = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ car $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 \rightarrow L_1 - 3L_2} \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Propriété.

Soit A une matrice de taille $m \times n$ quelconque.

Soit E une matrice élémentaire de taille $m \times m$.

Le produit EA est la matrice obtenue à partir de A à l'aide de l'opération élémentaire sur les lignes associée à la matrice E :

$\text{Si } I_m \sim E \text{ alors } A \sim EA$

Vérification.

Prenons $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}$, $E_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}$ et $E_3 = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. On a :

• Type I : $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} E_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} \begin{bmatrix} d & e & f \\ a & b & c \end{bmatrix}$
 $E_1 A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d & e & f \\ a & b & c \end{bmatrix}$

• Type II : $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 \rightarrow 7L_2} E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 \rightarrow 7L_2} \begin{bmatrix} a & b & c \\ 7d & 7e & 7f \end{bmatrix}$
 $E_2 A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 7d & 7e & 7f \end{bmatrix}$

• Type III : $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 \rightarrow L_1 - 3L_2} E_3 = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
 $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 \rightarrow L_1 - 3L_2} \begin{bmatrix} a-3d & b-3e & c-3f \\ d & e & f \end{bmatrix}$
 $E_3 A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a-3d & b-3e & c-3f \\ d & e & f \end{bmatrix}$

Proposition

Si E est une matrice élémentaire, alors E est inversible.

De plus, E^{-1} est aussi une matrice élémentaire de même type que E .

Preuve.

Il suffit de remarquer que les opérations élémentaires sur les lignes sont réversibles :

Type I : $I \xrightarrow{L_j \leftrightarrow L_k} E \xrightarrow{L_j \leftrightarrow L_k} I$

Type II : $I \xrightarrow{L_j \rightarrow \lambda L_j} E \xrightarrow{L_j \rightarrow \frac{1}{\lambda} L_j} I$

Type III : $I \xrightarrow{L_k \rightarrow L_k + \lambda L_j} E \xrightarrow{L_k \rightarrow L_k - \lambda L_j} I$

Si l'on note F la matrice élémentaire associée à la deuxième opération élémentaire on a bien $FE = I$, d'où $F = E^{-1}$. ■

Théorème.

Soit A une matrice de taille $m \times n$. Soit R la matrice échelonnée-réduite de taille $m \times n$ associée à A .

Alors il existe des matrices élémentaires $E_1, E_2, \dots, E_k$ de taille $m \times m$ telles que

$$E_k \cdots E_2 E_1 A = R$$

Preuve.

Comme $A \sim R$, il y a un nombre fini d'opérations élémentaires sur les lignes qui transforment A en R . Chacune de ces opérations élémentaires est associée à une matrice élémentaire.

$$\text{On a : } A \sim E_1 A \sim E_2 (E_1 A) = (E_2 E_1) A$$

$$\sim E_3 (E_2 E_1) A = (E_3 E_2 E_1) A \sim \dots$$

$$\sim E_k (E_{k-1} \cdots E_3 E_2 E_1) A = (E_k \cdots E_3 E_2 E_1) A = R \quad \blacksquare$$

Exemple.

$$\text{Soit } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

On a

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 \rightarrow L_2 - 2L_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = E_1 A \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 \rightarrow L_2 - 2L_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = E_1$$

$$\xrightarrow{L_2 \rightarrow \frac{1}{2}L_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = E_2 E_1 A \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 \rightarrow \frac{1}{2}L_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = E_2$$

$$\xrightarrow{L_1 \rightarrow L_1 - 1L_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = E_3 E_2 E_1 A \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 \rightarrow L_1 - 1L_2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = E_3$$

Ainsi, $R = E_3 E_2 E_1 A$.

Théorème.

Si A est une matrice inversible de taille $n \times n$, alors l'équation $A\vec{x} = \vec{b}$ est consistante pour tout choix de $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$. De plus, le vecteur $\vec{u} = A^{-1}\vec{b}$ est l'unique solution de $A\vec{x} = \vec{b}$.

Preuve.

Comme $A\vec{u} = A(A^{-1}\vec{b}) = (AA^{-1})\vec{b} = I_n \vec{b} = \vec{b}$, le vecteur $\vec{u}$ est une solution de $A\vec{x} = \vec{b}$.

Pour montrer que la solution est unique, supposons que $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ est une solution de $A\vec{x} = \vec{b}$. Autrement dit, on a $A\vec{v} = \vec{b}$.

En multipliant cette égalité par A^{-1} on obtient $A^{-1}(A\vec{v}) = A^{-1}\vec{b}$, d'où $(A^{-1}A)\vec{v} = A^{-1}\vec{b}$ et $\vec{v} = A^{-1}\vec{b}$. ■

Théorème. Soit A une matrice carrée de taille $n \times n$.

Alors nous avons l'équivalence suivante:

$$A \text{ est inversible} \Leftrightarrow A \sim I_n$$

De plus, toute suite d'opérations élémentaires sur les lignes qui transforme A en I_n , transforme I_n en A^{-1} .

Preuve.

$\Rightarrow$) Supposons que A est inversible.

Le théorème précédent implique que la forme échelonnée-réduite associée à A possède un pivot par ligne.

Comme A est carrée, les pivots se trouvent sur la diagonale et nous avons donc $R = I_n$.

$\Leftarrow$) Supposons que $A \sim I_n$. Il existe donc des matrices élémentaires $E_1, E_2, \dots, E_k$ telles que $(E_k \dots E_2 E_1)A = I_n$.

Comme $E_1, \dots, E_k$ sont élémentaires, elles sont inversibles et $(E_k \dots E_2 E_1)$ est aussi inversible, d'où :

$$A = (E_k \dots E_2 E_1)^{-1}$$

Par conséquent, A est inversible et nous trouvons :

$$A^{-1} = E_k \dots E_2 E_1.$$

Comme par construction

$$(E_k \dots E_2 E_1) I_n = A^{-1},$$

la suite d'opérations élémentaires sur les lignes qui transforme A en I_n transforme I_n en A^{-1} . ■

Méthode de calcul de A^{-1} .

Soit A une matrice carrée de taille $n \times n$.

1. Ecrire la matrice augmentée $[A | I_n]$

2. Réduire la matrice augmentée $[A | I_n]$

- Si lors de la réduction de cette matrice il y a une ligne de la forme $0 \dots 0 \mid * \dots *$ alors A n'est pas inversible.

- Sinon, A est inversible et nous avons

$$[A | I_n] \sim [I_n | A^{-1}]$$

Exemples.

Calculer l'inverse des matrices suivantes :

1. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

On a :

$$[A | I] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow[\substack{L_2 \rightarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \rightarrow L_3 - L_1}]{\quad} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow[\substack{L_1 \rightarrow L_1 - L_3 \\ L_2 \rightarrow L_2 - L_3}]{\quad} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right] = [I | A^{-1}]$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Vérification :

$$AA^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+0-1 & 0+0+0 & -1+0+1 \\ 4-1-3 & 0+1+0 & -2-1+3 \\ 2+0-2 & 0+0+0 & -1+0+1 \end{bmatrix} = I$$
$$A^{-1}A = \dots = I$$

$$2. A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 6 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$

On a:

$$[A|I] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & -2 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{L_2 \rightarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \rightarrow L_3 - 6L_1}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -3 & -6 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{\substack{L_1 \rightarrow L_1 + L_2 \\ L_3 \rightarrow L_3 - 4L_2}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -4 & 1 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{\substack{L_1 \rightarrow L_1 + L_3 \\ L_2 \rightarrow L_2 + L_3}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -4 & 1 \end{array} \right] = [I|A^{-1}]$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & -3 & 1 \\ -3 & -3 & 1 \\ -2 & -4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Vérification:} \\ AA^{-1} = \dots = I \\ A^{-1}A = \dots = I \end{array} \right.$$

$$3. A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -5 \\ 1 & 0 & 2 \\ -4 & -9 & 7 \end{bmatrix}$$

On a:

$$[A|I] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 3 & -5 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & -9 & 7 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -5 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -9 & 7 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{L_3 \rightarrow L_3 + 4L_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -9 & 15 & 0 & 4 & 1 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{L_3 \rightarrow L_3 + 3L_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 4 & 1 \end{array} \right]$$

$\Rightarrow A$ n'est pas inversible

Caractérisation des matrices inversibles.

Théorème. (Théorème de caractérisation des matrices inversibles)

Soit $A = [\vec{a}_1 \dots \vec{a}_n]$ une matrice carrée de taille $n \times n$.

Les propriétés suivantes sont équivalentes (autrement dit, elles sont toutes vraies ou toutes fausses) :

- a) A est inversible.
- b) $A \sim I_n$ (A est équivalente selon les lignes à I_n)
- c) A admet n positions pivot.
- d) L'équation $A\vec{x} = \vec{0}$ possède comme unique solution $\vec{x} = \vec{0}$
- e) Les colonnes de A sont linéairement indépendantes.
- f) L'application linéaire $\vec{x} \mapsto A\vec{x}$ est injective
- g) L'équation $A\vec{x} = \vec{b}$ admet au moins une solution pour tout $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$
- h) $\text{Vect}\{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n\} = \mathbb{R}^n$ (les colonnes de A engendrent $\mathbb{R}^n$)
- i) L'application linéaire $\vec{x} \mapsto A\vec{x}$ est surjective
- j) Il existe une matrice carrée C telle que $CA = I_n$ (inverse à gauche)
- k) Il existe une matrice carrée D telle que $AD = I_n$ (inverse à droite)
- l) A^T est inversible

Conséquence importante.

Proposition.

Soient A et B deux matrices carrées de taille $n \times n$.

Si $AB = I_n$, alors A et B sont inversibles et $A^{-1} = B$ et $B^{-1} = A$.

Preuve.

Si $AB = I_n$, alors A possède un inverse à droite et le théorème de caractérisation des matrices inversibles implique que A est inversible et $A^{-1} = B$.

Si $AB = I_n$, alors B possède un inverse à gauche et le théorème de caractérisation des matrices inversibles implique que B est inversible et $B^{-1} = A$. ■

Définition.

Soit A une matrice carrée de taille $n \times n$.

On dit que A est **singulière** si A n'est pas inversible.

Remarque.

Le théorème de caractérisation des matrices inversibles partage l'ensemble de matrices carrées en deux classes disjointes:

- les matrices inversibles (ou non singulières) et
- les matrices singulières (ou non inversibles).

Applications linéaires inversibles.

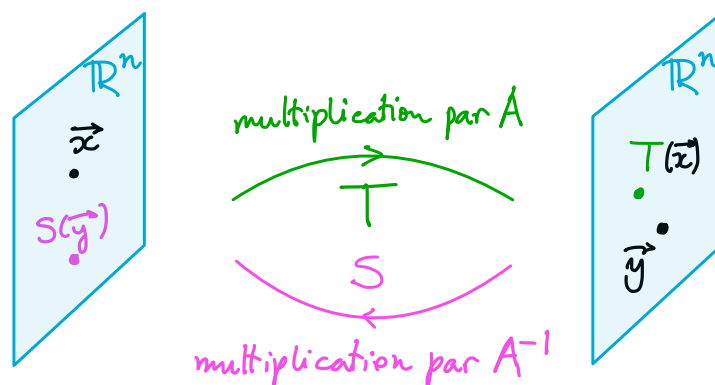
Soit A une matrice carrée de taille $n \times n$.

Soit $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ l'application linéaire associée à A : $T(\vec{x}) = A\vec{x}$

Si A est inversible, alors A^{-1} existe et nous pouvons considérer

l'application linéaire $S: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ définie par $S(\vec{y}) = A^{-1}\vec{y}$.

Nous avons le schéma suivant:



Comme $A^{-1}A = I_n$ et $AA^{-1} = I_n$ les compositions $S \circ T$ et $T \circ S$ satisfont;

$$(S \circ T)(\vec{x}) = \vec{x} \quad \text{pour tout } \vec{x} \in \mathbb{R}^n$$

$$(T \circ S)(\vec{y}) = \vec{y} \quad \text{pour tout } \vec{y} \in \mathbb{R}^n$$

Définition.

On dit que $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est une application linéaire **inversible**

s'il existe une application linéaire $S: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ telle que

$$S(T(\vec{x})) = \vec{x} \quad \text{pour tout } \vec{x} \in \mathbb{R}^n$$

$$\text{et } T(S(\vec{y})) = \vec{y} \quad \text{pour tout } \vec{y} \in \mathbb{R}^n$$

Théorème.

Soit $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ une application linéaire et soit A la matrice canoniquement associée à T . Nous avons l'équivalence:

$$T \text{ inversible} \Leftrightarrow A \text{ inversible.}$$

Dans ce cas, l'application linéaire $S: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ définie par

$S(\vec{y}) = A^{-1}\vec{y}$ est l'unique application linéaire qui satisfait

$$S(T(\vec{x})) = \vec{x} \text{ pour tout } \vec{x} \in \mathbb{R}^n$$

$$\text{et } T(S(\vec{y})) = \vec{y} \text{ pour tout } \vec{y} \in \mathbb{R}^n$$

On l'appelle l'inverse de T , notée T^{-1} .

Preuve.

$\Rightarrow$) Supposons que T est inversible. On a $T(S(\vec{b})) = \vec{b}$ pour tout $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$.

Ainsi, $T(\vec{x}) = \vec{b}$ admet au moins une solution pour tout $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$

et T est surjective. Le théorème de caractérisation des matrices inversibles nous dit que dans ce cas, A est inversible.

$\Leftarrow$) Si A est inversible, alors l'application linéaire $S: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$

associée à A^{-1} satisfait

$$S(T(\vec{x})) = \vec{x} \text{ pour tout } \vec{x} \in \mathbb{R}^n$$

$$\text{et } T(S(\vec{y})) = \vec{y} \text{ pour tout } \vec{y} \in \mathbb{R}^n$$

et T est inversible.

Supposons que $U: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ satisfait aussi $U(T(\vec{x})) = \vec{x}$ et $T(U(\vec{y})) = \vec{y}$.

Comme T est surjective, pour tout $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$ il existe (au moins) un $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ tel que $T(\vec{x}) = \vec{b}$. Ainsi,

$$\left. \begin{array}{l} S(\vec{b}) = S(T(\vec{x})) = (S \circ T)(\vec{x}) = \vec{x} \\ U(\vec{b}) = U(T(\vec{x})) = (U \circ T)(\vec{x}) = \vec{x} \end{array} \right\} \Rightarrow S(\vec{b}) = U(\vec{b}) \text{ pour tout } \vec{b} \in \mathbb{R}^n$$

$\Rightarrow S = U$. ■

Factorisations matricielles.

La factorisation est très utile en mathématiques. Elle permet par exemple de trouver les racines d'un polynôme: $p(x) = x^2 - 16 = (x+4)(x-4)$

Nous verrons ici que dans certaines situations, une matrice A peut s'exprimer comme le produit de deux matrices et que ceci peut faciliter la résolution du système $A\vec{x} = \vec{b}$.

Rappel.

Soit $A = [a_{jk}]$ une matrice carrée de taille $n \times n$.

- on dit que A est une matrice **triangulaire supérieure**

si $a_{jk} = 0$ pour tout $j > k$

$$A = \begin{bmatrix} \triangle \\ 0 \end{bmatrix}$$

- on dit que A est une matrice **triangulaire inférieure**

si $a_{jk} = 0$ pour tout $j < k$

$$A = \begin{bmatrix} \triangle & 0 \end{bmatrix}$$

Exemple important.

Les matrices échelonnées sont des matrices triangulaires supérieures.

Propriétés

- Si A et B sont deux matrices triangulaires supérieures de même taille, alors AB et BA sont aussi triangulaires supérieures.
- Si A et B sont deux matrices triangulaires inférieures de même taille, alors AB et BA sont aussi triangulaires inférieures.
- Si A est une matrice triangulaire supérieure inversible, alors A^{-1} est aussi une matrice triangulaire supérieure.
- Si A est une matrice triangulaire inférieure inversible, alors A^{-1} est aussi une matrice triangulaire inférieure.

Définition.

Soit $A = [a_{jk}]$ une matrice triangulaire (supérieure ou inférieure)

On dit que A est une **matrice unitaire** si $a_{jj} = 1$ pour tout j .

Exemple.

Les matrices élémentaires de type III, associées aux opérations élémentaires de la forme $L_j \rightarrow L_j + \lambda L_k$

sont des matrices unitaires. De plus :

- si $k < j$, alors elles sont triangulaires inférieures.
- si $k > j$, alors elles sont triangulaires supérieures.

Factorisation LU. (Lower-Upper)

Soit A une matrice carrée de taille $n \times n$.

Supposons qu'il est possible d'échelonner la matrice A en utilisant **uniquement** des opérations élémentaires de type III de la forme

$$L_j \rightarrow L_j + \lambda L_k \quad \text{avec } j > k.$$

Soient $E_1, E_2, \dots, E_p$ les matrices élémentaires associées aux opérations élémentaires utilisées dans l'échelonnement et soit U la matrice échelonnée obtenue.

Par construction nous avons

$$E_p \dots E_2 E_1 A = U$$

Comme $E_1, \dots, E_p$ sont inversibles, le produit $E_p \dots E_1$ est inversible, et nous pouvons écrire :

$$A = (E_p \dots E_1)^{-1} U = (E_1^{-1} \dots E_p^{-1}) U$$

Comme $E_1, \dots, E_p$ sont triangulaires inférieures, la matrice

$$L = E_1^{-1} \dots E_p^{-1}$$

est aussi triangulaire inférieure.

Ainsi, dans ce cas, nous pouvons factoriser A :

$A = LU$ où L est triangulaire inférieure ("Lower")

et U est triangulaire supérieure ("Upper")

De plus, par construction, la matrice L est toujours inversible.

Exemple.

Trouver une factorisation LU de la matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & -3 \\ -1 & 4 & 5 \end{bmatrix}$

On a :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & -3 \\ -1 & 4 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 \rightarrow L_2 + 2L_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & 4 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3 \rightarrow L_3 + 1L_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 8 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3 \rightarrow L_3 - 4L_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

d'où $E_3 E_2 E_1 A = U$ avec

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 \end{bmatrix} \text{ et } U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

Ainsi

$$L = E_1^{-1} E_2^{-1} E_3^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & +4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

et

$$A = LU \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & -3 \\ -1 & 4 & 5 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & 1 \end{bmatrix}}_{=L} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}}_{=U}$$

L'exemple précédent nous fournit un algorithme pour construire L :

Algorithme de construction de L :

$L = [l_{jk}]$ est la matrice triangulaire inférieure unitaire

où

$$l_{jk} = \begin{cases} 1 & \text{si } j=k \\ -\lambda & \text{si lors de l'échelonnement de } A \text{ nous avons} \\ & \text{utilisé l'opération élémentaire } L_j \rightarrow L_j + \lambda L_k \text{ avec } j > k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Application.

Il est souvent nécessaire de résoudre plusieurs systèmes associés à une matrice de coefficients donnée: $A\vec{x} = \vec{b}_1, A\vec{x} = \vec{b}_2, \dots, A\vec{x} = \vec{b}_q$

Les factorisations LU peuvent raccourcir le temps de calcul.

Si l'on remplace A par LU :

$$A\vec{x} = \vec{b} \Leftrightarrow (LU)\vec{x} = \vec{b} \Leftrightarrow L(U\vec{x}) = \vec{b}$$

alors la résolution de $A\vec{x} = \vec{b}$ peut être remplacée par la résolution

de deux systèmes

$$\begin{cases} U\vec{x} = \vec{y} \\ L\vec{y} = \vec{b} \end{cases}$$

qui sont plus faciles à résoudre car L et U sont triangulaires.

Exemple.

Résoudre $A\vec{x} = \vec{b}$ où $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & 3 \\ -2 & 5 & 5 \end{bmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$

On a :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & 3 \\ -2 & 5 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_3 \rightarrow L_3 + L_1]{L_2 \rightarrow L_2 - 2L_1} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & 6 & 8 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3 \rightarrow L_3 + 2L_2} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = U$$

L'algorithme de construction de L nous donne : $L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$

$$L\vec{y} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = 4 \\ 2y_1 + y_2 = 2 \\ -y_1 - 2y_2 + y_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = 4 \\ y_2 = -6 \\ y_3 = -8 \end{cases}$$

$$U\vec{x} = \vec{y} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -6 \\ -8 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 4 \\ -3x_2 - 3x_3 = -6 \\ 2x_3 = -8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 5 \\ x_2 = 6 \\ x_3 = -4 \end{cases}$$

Ainsi, la solution cherchée est $\boxed{\vec{x} = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ -4 \end{bmatrix}}$