

Applications linéaires inversibles.

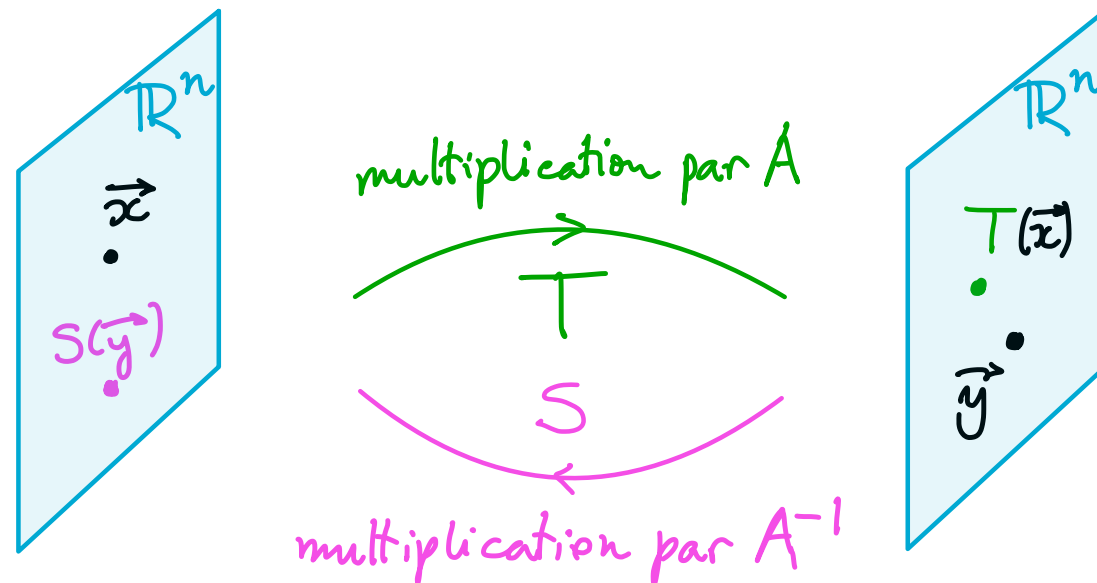
Soit A une matrice carrée de taille $n \times n$.

Soit $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ l'application linéaire associée à A : $T(\vec{x}) = A\vec{x}$

Si A est inversible, alors A^{-1} existe et nous pouvons considérer

l'application linéaire $S: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ définie par $S(\vec{y}) = A^{-1}\vec{y}$.

Nous avons le schéma suivant:



Comme $A^{-1}A = I_n$ et $AA^{-1} = I_n$ les compositions $S \circ T$ et $T \circ S$ satisfont;

$$(S \circ T)(\vec{x}) = \vec{x} \quad \text{pour tout } \vec{x} \in \mathbb{R}^n$$

$$(T \circ S)(\vec{y}) = \vec{y} \quad \text{pour tout } \vec{y} \in \mathbb{R}^n$$

Définition.

On dit que $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est une application linéaire *inversible*

s'il existe une application linéaire $S: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ telle que

$$S(T(\vec{x})) = \vec{x} \quad \text{pour tout } \vec{x} \in \mathbb{R}^n$$

$$\text{et } T(S(\vec{y})) = \vec{y} \quad \text{pour tout } \vec{y} \in \mathbb{R}^n$$

Théorème.

Soit $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ une application linéaire et soit A la matrice canoniquement associée à T . Nous avons l'équivalence:

$$T \text{ inversible} \Leftrightarrow A \text{ inversible}.$$

Dans ce cas, l'application linéaire $S: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ définie par

$S(\vec{y}) = A^{-1}\vec{y}$ est l'unique application linéaire qui satisfait

$$S(T(\vec{x})) = \vec{x} \text{ pour tout } \vec{x} \in \mathbb{R}^n$$

$$\text{et } T(S(\vec{y})) = \vec{y} \text{ pour tout } \vec{y} \in \mathbb{R}^n$$

On l'appelle l'inverse de T , notée T^{-1} .

Preuve.

$\Rightarrow$) Supposons que T est inversible. On a $T(S(\vec{b})) = \vec{b}$ pour tout $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$.

Ainsi, $T(\vec{x}) = \vec{b}$ admet **au moins une** solution pour tout $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$

et T est surjective. Le théorème de caractérisation des matrices inversibles nous dit que dans ce cas, A est inversible.

$\Leftarrow$) Si A est inversible, alors l'application linéaire $S: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$

associée à A^{-1} satisfait

$$S(T(\vec{x})) = \vec{x} \quad \text{pour tout } \vec{x} \in \mathbb{R}^n$$

$$\text{et } T(S(\vec{y})) = \vec{y} \quad \text{pour tout } \vec{y} \in \mathbb{R}^n$$

et T est inversible.

Supposons que $u: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ satisfait aussi $u(T(\vec{x})) = \vec{x}$ et $T(u(\vec{y})) = \vec{y}$.

Comme T est surjective, pour tout $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$ il existe (au moins) un $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ tel que $T(\vec{x}) = \vec{b}$. Ainsi,

$$\left. \begin{array}{l} S(\vec{b}) = S(T(\vec{x})) = (S \circ T)(\vec{x}) = \vec{x} \\ u(\vec{b}) = u(T(\vec{x})) = (u \circ T)(\vec{x}) = \vec{x} \end{array} \right\} \Rightarrow S(\vec{b}) = u(\vec{b}) \text{ pour tout } \vec{b} \in \mathbb{R}^n$$

$\Rightarrow S = u$. ■

Factorisations matricielles.

La factorisation est très utile en mathématiques. Elle permet par exemple de trouver les racines d'un polynôme : $p(x) = x^2 - 16 = (x+4)(x-4)$

Nous verrons ici que dans certaines situations, une matrice A peut s'exprimer comme le produit de deux matrices et que ceci peut faciliter la résolution du système $A\vec{x} = \vec{b}$.

Rappel.

Soit $A = [a_{jk}]$ une matrice carrée de taille $n \times n$.

- on dit que A est une matrice triangulaire supérieure

si $a_{jk} = 0$ pour tout $j > k$

$$A = \begin{bmatrix} \triangle \\ 0 \end{bmatrix}$$

- on dit que A est une matrice triangulaire inférieure

si $a_{jk} = 0$ pour tout $j < k$

$$A = \begin{bmatrix} \triangle 0 \end{bmatrix}$$

Exemple important.

Les matrices échelonnées sont des matrices triangulaires supérieures.

Propriétés

- Si A et B sont deux matrices triangulaires supérieures de même taille, alors AB et BA sont aussi triangulaires supérieures.
- Si A et B sont deux matrices triangulaires inférieures de même taille, alors AB et BA sont aussi triangulaires inférieures.
- Si A est une matrice triangulaire supérieure inversible, alors A^{-1} est aussi une matrice triangulaire supérieure.
- Si A est une matrice triangulaire inférieure inversible, alors A^{-1} est aussi une matrice triangulaire inférieure.

Définition.

Soit $A = [a_{jk}]$ une matrice triangulaire (supérieure ou inférieure)

On dit que A est une **matrice unitaire** si $a_{jj} = 1$ pour tout j .

Exemple.

Les matrices élémentaires de type III, associées aux opérations élémentaires de la forme $L_j \rightarrow L_j + \lambda L_k$

sont des matrices unitaires. De plus :

- si $k < j$, alors elles sont triangulaires inférieures.
- si $k > j$, alors elles sont triangulaires supérieures.

Factorisation LU. (Lower-Upper)

Soit A une matrice carrée de taille $n \times n$.

Supposons qu'il est possible d'échelonner la matrice A en utilisant *uniquement* des opérations élémentaires de type III de la forme

$$L_j \rightarrow L_j + \lambda L_k \quad \text{avec } j > k.$$

Soient $E_1, E_2, \dots, E_p$ les matrices élémentaires associées aux opérations élémentaires utilisées dans l'échelonnement et soit U la matrice échelonnée obtenue.

Par construction nous avons

$$E_p \cdots E_2 E_1 A = U$$

Comme $E_1, \dots, E_p$ sont inversibles, le produit $E_p \dots E_1$ est inversible, et nous pouvons écrire :

$$A = (E_p \dots E_1)^{-1} U = (E_1^{-1} \dots E_p^{-1}) U$$

Comme $E_1, \dots, E_p$ sont triangulaires inférieures, la matrice

$$L = E_1^{-1} \dots E_p^{-1}$$

est aussi triangulaire inférieure.

Ainsi, dans ce cas, nous pouvons factoriser A :

$A = LU$ où L est triangulaire inférieure ("Lower")

et U est triangulaire supérieure ("Upper")

De plus, par construction, la matrice L est toujours inversible.

Exemple.

Trouver une factorisation LU de la matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & -3 \\ -1 & 4 & 5 \end{bmatrix}$

On a :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & -3 \\ -1 & 4 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 \rightarrow L_2 + 2L_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & 4 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3 \rightarrow L_3 + L_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 8 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3 \rightarrow L_3 - 4L_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

d'où $E_3 E_2 E_1 A = U$ avec

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 \end{bmatrix} \text{ et } U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

Ainsi

$$L = E_1^{-1} E_2^{-1} E_3^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & +4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

et

$$A = LU \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & -3 \\ -1 & 4 & 5 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & 1 \end{bmatrix}}_{=L} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}}_{=U}$$

L'exemple précédent nous fournit un algorithme pour construire L :

Algorithme de construction de L :

$L = [l_{jk}]$ est la matrice triangulaire inférieure unitaire

où

$$l_{jk} = \begin{cases} 1 & \text{si } j=k \\ -\lambda & \text{si lors de l'échelonnement de } A \text{ nous avons} \\ & \text{utilisé l'opération élémentaire } L_j \rightarrow L_j + \lambda L_k \text{ avec } j > k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Application.

Il est souvent nécessaire de résoudre plusieurs systèmes associés à une matrice de coefficients donnée: $A\vec{x} = \vec{b}_1, A\vec{x} = \vec{b}_2, \dots, A\vec{x} = \vec{b}_q$

Les factorisations LU peuvent raccourcir le temps de calcul.

Si l'on remplace A par LU :

$$A\vec{x} = \vec{b} \Leftrightarrow (LU)\vec{x} = \vec{b} \Leftrightarrow L(U\vec{x}) = \vec{b}$$

alors la résolution de $A\vec{x} = \vec{b}$ peut être remplacée par la résolution

de deux systèmes
$$\begin{cases} U\vec{x} = \vec{y} \\ L\vec{y} = \vec{b} \end{cases}$$

qui sont plus faciles à résoudre car L et U sont triangulaires.

Exemple.

Résoudre $A\vec{x} = \vec{b}$ où $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & 3 \\ -2 & 5 & 5 \end{bmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$

On a :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & 3 \\ -2 & 5 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_3 \rightarrow L_3 + 1L_1]{L_2 \rightarrow L_2 - 2L_1} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & 6 & 8 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3 \rightarrow L_3 + 2L_2} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = U$$

L'algorithme de construction de L nous donne : $L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$

$$L\vec{y} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = 4 \\ 2y_1 + y_2 = 2 \\ -y_1 - 2y_2 + y_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = 4 \\ y_2 = -6 \\ y_3 = -8 \end{cases}$$

$$U\vec{x} = \vec{y} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -6 \\ -8 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 4 \\ -3x_2 - 3x_3 = -6 \\ 2x_3 = -8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 5 \\ x_2 = 6 \\ x_3 = -4 \end{cases}$$

Ainsi, la solution cherchée est $\vec{x} = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ -4 \end{bmatrix}$