

## Matrices élémentaires.

### Rappel.

Nous avons vu qu'il y a trois types d'opérations élémentaires (sur les lignes d'une matrice):

- Type I: échanger deux lignes:

$$L_j \leftrightarrow L_k$$

- Type II: multiplier une ligne par un nombre *non-nul*:

$$L_j \rightarrow \lambda L_j, \text{ avec } \lambda \neq 0$$

- Type III: additionner un multiple d'une ligne à une autre:

$$L_k \rightarrow L_k + \lambda L_j, \text{ avec } j \neq k \text{ et } \lambda \in \mathbb{R}$$

### Définition.

Une matrice carrée de taille  $n \times n$  est une **matrice élémentaire** si elle peut être obtenue à partir de la matrice identité  $I_n$  à l'aide d'**une seule** opération élémentaire sur les lignes.

Par conséquent, il y a trois types de matrice élémentaire.

### Illustration ( $n=2$ )

• Type I:  $E_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$  car  $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

• Type II:  $E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}$  car  $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 \rightarrow 7L_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}$

• Type III:  $E_3 = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  car  $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 \rightarrow L_1 - 3L_2} \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

## Propriété.

Soit  $A$  une matrice de taille  $m \times n$  quelconque.

Soit  $E$  une matrice élémentaire de taille  $m \times m$ .

Le produit  $EA$  est la matrice obtenue à partir de  $A$  à l'aide de l'opération élémentaire sur les lignes associée à la matrice  $E$  :

$$\text{Si } I_m \sim E \text{ alors } A \sim EA$$

## Vérification.

Prenons  $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}$ ,  $E_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}$  et  $E_3 = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ . On a :

• Type I:  $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} E_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} \begin{bmatrix} d & e & f \\ a & b & c \end{bmatrix}$

$$E_1 A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d & e & f \\ a & b & c \end{bmatrix}$$

• Type II:  $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 \rightarrow 7L_2} E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}$ ,  $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 \rightarrow 7L_2} \begin{bmatrix} a & b & c \\ 7d & 7e & 7f \end{bmatrix}$

$$E_2 A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 7d & 7e & 7f \end{bmatrix}$$

• Type III:  $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 \rightarrow L_1 - 3L_2} E_3 = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 \rightarrow L_1 - 3L_2} \begin{bmatrix} a-3d & b-3e & c-3f \\ d & e & f \end{bmatrix}$$

$$E_3 A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a-3d & b-3e & c-3f \\ d & e & f \end{bmatrix}$$

## Proposition

Si  $E$  est une matrice élémentaire, alors  $E$  est inversible.

De plus,  $E^{-1}$  est aussi une matrice élémentaire de même type que  $E$ .

## Preuve.

Il suffit de remarquer que les opérations élémentaires sur les lignes sont réversibles:

Type I: 
$$I \xrightarrow{L_j \leftrightarrow L_k} E \xrightarrow{L_j \leftrightarrow L_k} I$$

Type II: 
$$I \xrightarrow{L_j \rightarrow \lambda L_j} E \xrightarrow{L_j \rightarrow \frac{1}{\lambda} L_j} I$$

Type III: 
$$I \xrightarrow{L_k \rightarrow L_k + \lambda L_j} E \xrightarrow{L_k \rightarrow L_k - \lambda L_j} I$$

Si l'on note  $F$  la matrice élémentaire associée à la deuxième opération élémentaire on a bien  $FE = I$ , d'où  $F = E^{-1}$ . ■

## Théorème.

Soit  $A$  une matrice de taille  $m \times n$ . Soit  $R$  la matrice échelonnée-réduite de taille  $m \times n$  associée à  $A$ .

Alors il existe des matrices élémentaires  $E_1, E_2, \dots, E_k$  de taille  $m \times m$  telles que

$$E_k \cdots E_2 E_1 A = R$$

### Preuve.

Comme  $A \sim R$ , il y a un nombre fini d'opérations élémentaires sur les lignes qui transforment  $A$  en  $R$ . Chacune de ces opérations élémentaires est associée à une matrice élémentaire.

$$\text{On a : } A \sim E_1 A \sim E_2 (E_1 A) = (E_2 E_1) A$$

$$\sim E_3 (E_2 E_1) A = (E_3 E_2 E_1) A \sim \dots$$

$$\sim E_k (E_{k-1} \dots E_3 E_2 E_1) A = (E_k \dots E_3 E_2 E_1) A = R \quad \blacksquare$$

### Exemple.

$$\text{Soit } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

On a

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 \rightarrow L_2 - 2L_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = E_1 A \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 \rightarrow L_2 - 2L_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = E_1$$

$$\xrightarrow{L_2 \rightarrow \frac{1}{2}L_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = E_2 E_1 A \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 \rightarrow \frac{1}{2}L_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = E_2$$

$$\xrightarrow{L_1 \rightarrow L_1 - 1L_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = E_3 E_2 E_1 A \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 \rightarrow L_1 - 1L_2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = E_3$$

$$\text{Ainsi, } R = E_3 E_2 E_1 A.$$



## Théorème.

Si  $A$  est une matrice inversible de taille  $n \times n$ , alors l'équation  $A\vec{x} = \vec{b}$  est consistante pour tout choix de  $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$ . De plus, le vecteur  $\vec{u} = A^{-1}\vec{b}$  est l'unique solution de  $A\vec{x} = \vec{b}$ .

## Preuve.

Comme  $A\vec{u} = A(A^{-1}\vec{b}) = (AA^{-1})\vec{b} = I_n\vec{b} = \vec{b}$ , le vecteur  $\vec{u}$  est une solution de  $A\vec{x} = \vec{b}$ .

Pour montrer que la solution est unique, supposons que  $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$  est une solution de  $A\vec{x} = \vec{b}$ . Autrement dit, on a  $A\vec{v} = \vec{b}$ .

En multipliant cette égalité par  $A^{-1}$  on obtient  $A^{-1}(A\vec{v}) = A^{-1}\vec{b}$ ,

d'où  $(A^{-1}A)\vec{v} = A^{-1}\vec{b}$  et  $\vec{v} = A^{-1}\vec{b}$ . ■

Théorème. Soit  $A$  une matrice carrée de taille  $n \times n$ .

Alors nous avons l'équivalence suivante:

$$A \text{ est inversible} \Leftrightarrow A \sim I_n$$

De plus, toute suite d'opérations élémentaires sur les lignes qui transforme  $A$  en  $I_n$ , transforme  $I_n$  en  $A^{-1}$ .

Preuve.

$\Rightarrow$ ) Supposons que  $A$  est inversible.

Le théorème précédent implique que la forme échelonnée-réduite associée à  $A$  possède un pivot par ligne.

Comme  $A$  est carrée, les pivots se trouvent sur la diagonale et nous avons donc  $R = I_n$ .

⇐) Supposons que  $A \sim I_n$ . Il existe donc des matrices élémentaires  $E_1, E_2, \dots, E_k$  telles que  $(E_k \dots E_2 E_1)A = I_n$ .

Comme  $E_1, \dots, E_k$  sont élémentaires, elles sont inversibles et  $(E_k \dots E_2 E_1)$  est aussi inversible, d'où :

$$A = (E_k \dots E_2 E_1)^{-1}$$

Par conséquent,  $A$  est inversible et nous trouvons :

$$A^{-1} = E_k \dots E_2 E_1.$$

Comme par construction

$$(E_k \dots E_2 E_1) I_n = A^{-1},$$

la suite d'opérations élémentaires sur les lignes qui transforme  $A$  en  $I_n$  transforme  $I_n$  en  $A^{-1}$ . ■

## Méthode de calcul de $A^{-1}$ .

Soit  $A$  une matrice carrée de taille  $n \times n$ .

1. Ecrire la matrice augmentée  $[A | I_n]$

2. Réduire la matrice augmentée  $[A | I_n]$

– Si lors de la réduction de cette matrice il y a une ligne de la forme  $0 \dots 0 \mid * \dots *$  alors  $A$  n'est pas inversible.

– Sinon,  $A$  est inversible et nous avons

$$[A | I_n] \sim [I_n | A^{-1}]$$

## Exemples.

Calculer l'inverse des matrices suivantes :

$$1. A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

On a :

$$[A|I] = \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow[\substack{L_2 \rightarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \rightarrow L_3 - L_1}]{} \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow[\substack{L_1 \rightarrow L_1 - L_3 \\ L_2 \rightarrow L_2 - L_3}]{} \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right] = [I|A^{-1}]$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Vérification :

$$AA^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+0-1 & 0+0+0 & -1+0+1 \\ 4-1-3 & 0+1+0 & -2-1+3 \\ 2+0-2 & 0+0+0 & -1+0+1 \end{bmatrix} = I$$

$$A^{-1}A = \dots = I$$

$$2. A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 6 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$

On a:

$$[A|I] = \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & -2 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{L_2 \rightarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \rightarrow L_3 - 6L_1}} \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -3 & -6 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{\substack{L_1 \rightarrow L_1 + L_2 \\ L_3 \rightarrow L_3 - 4L_2}} \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -4 & 1 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{\substack{L_1 \rightarrow L_1 + L_3 \\ L_2 \rightarrow L_2 + L_3}} \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -4 & 1 \end{array} \right] = [I|A^{-1}]$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & -3 & 1 \\ -3 & -3 & 1 \\ -2 & -4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Vérification:} \\ AA^{-1} = \dots = I \\ A^{-1}A = \dots = I \end{array} \right.$$

$$3. A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -5 \\ 1 & 0 & 2 \\ -4 & -9 & 7 \end{bmatrix}$$

On a.

$$[A|I] = \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 0 & 3 & -5 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & -9 & 7 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -5 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -9 & 7 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{L_3 \rightarrow L_3 + 4L_1} \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -9 & 15 & 0 & 4 & 1 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{L_3 \rightarrow L_3 + 3L_2} \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 4 & 1 \end{array} \right]$$

$\Rightarrow A$  n'est pas inversible

## Caractérisation des matrices inversibles.

Théorème. (Théorème de caractérisation des matrices inversibles)

Soit  $A = [\vec{a}_1 \dots \vec{a}_n]$  une matrice carrée de taille  $n \times n$ .

Les propriétés suivantes sont équivalentes (autrement dit, elles sont toutes vraies ou toutes fausses) :

- a)  $A$  est inversible.
- b)  $A \sim I_n$  ( $A$  est équivalente selon les lignes à  $I_n$ )
- c)  $A$  admet  $n$  positions pivot.
- d) L'équation  $A\vec{x} = \vec{0}$  possède comme unique solution  $\vec{x} = \vec{0}$
- e) Les colonnes de  $A$  sont linéairement indépendantes.



f) L'application linéaire  $\vec{x} \mapsto A\vec{x}$  est injective

g) L'équation  $A\vec{x} = \vec{b}$  admet au moins une solution pour tout  $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$

h)  $\text{Vect}\{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n\} = \mathbb{R}^n$  (les colonnes de  $A$  engendrent  $\mathbb{R}^n$ )

i) L'application linéaire  $\vec{x} \mapsto A\vec{x}$  est surjective

j) Il existe une matrice carrée  $C$  telle que  $CA = I_n$  (inverse à gauche)

k) Il existe une matrice carrée  $D$  telle que  $AD = I_n$  (inverse à droite)

l)  $A^T$  est inversible

## Conséquence importante.

### Proposition.

Soient  $A$  et  $B$  deux matrices carrées de taille  $n \times n$ .

Si  $AB = I_n$ , alors  $A$  et  $B$  sont inversibles et  $A^{-1} = B$  et  $B^{-1} = A$ .

### Preuve.

Si  $AB = I_n$ , alors  $A$  possède un inverse à droite et le théorème de caractérisation des matrices inversibles implique que  $A$  est inversible et  $A^{-1} = B$ .

Si  $AB = I_n$ , alors  $B$  possède un inverse à gauche et le théorème de caractérisation des matrices inversibles implique que  $B$  est inversible et  $B^{-1} = A$ . ■

### Définition.

Soit  $A$  une matrice carrée de taille  $n \times n$ .

On dit que  $A$  est **singulière** si  $A$  n'est pas inversible.

### Remarque.

Le théorème de caractérisation des matrices inversibles partage l'ensemble de matrices carrées en deux classes disjointes:

- les matrices inversibles (ou non singulières) et
- les matrices singulières (ou non inversibles).