
2. Calcul matriciel

2.1. Opérations matricielles

Définition. Une *matrice* de taille $m \times n$ est un tableau rectangulaire de mn nombres réels disposés sur m lignes et n colonnes. Les éléments de la matrice sont appelés *coefficients* (ou *éléments*) de la matrice.

Nous utilisons des lettres majuscules pour noter les matrices :

$$A, B, \dots$$

et des lettres minuscules pour les coefficients :

a_{jk} est le coefficient de la matrice A situé à la j -ème ligne et la k -ème colonne.

Une matrice de taille $m \times n$ a la forme générale suivante :

$$A = \underbrace{\left[\begin{array}{ccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{array} \right]}_{n \text{ colonnes}} \left. \vphantom{\begin{array}{ccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{array}} \right\} m \text{ lignes}$$

Notation : L'ensemble des matrices de taille $m \times n$ à coefficients dans $\mathbb{R}$ est noté $M_{m,n}(\mathbb{R})$.

De plus, nous utilisons parfois la notation

$$A = [a_{jk}]$$

plutôt que

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Nous utilisons aussi la notation

$$A = [\vec{a}_1 \quad \vec{a}_2 \quad \cdots \quad \vec{a}_n]$$

où

$$\vec{a}_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}, \vec{a}_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix}, \dots, \vec{a}_n = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix},$$

sont les n colonnes de la matrice A .

Cas particuliers

- *Matrice nulle*, notée $O \in M_{m,n}(\mathbb{R})$, telle que tous ses coefficients sont nuls :

$$O = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}.$$

- *Matrice carrée*, si la matrice a le même nombre de lignes et de colonnes : $m = n$.
- *Matrice diagonale* : matrice carrée telle que $a_{jk} = 0$ si $j \neq k$:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

- *Matrice identité* ou *matrice unité*, notée $I_n \in M_{n,n}(\mathbb{R})$: matrice diagonale telle que $a_{jj} = 1$ pour tout $j = 1, 2, \dots, n$:

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}.$$

- *Matrice triangulaire supérieure* : matrice carrée telle que tous les coefficients au-dessous de la diagonale principale sont nuls :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

- *Matrice triangulaire inférieure* : matrice carrée telle que tous les coefficients au-dessus de la diagonale principale sont nuls :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Opérations

Somme de matrices :

Soient $A = [a_{jk}]$ et $B = [b_{jk}]$ deux matrices de taille $m \times n$. La somme des matrices A et B , notée $A + B$, est la matrice de taille $m \times n$ donnée par :

$$A + B = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{bmatrix}.$$

Attention : La somme de matrices n'est pas définie si les matrices n'ont pas la même taille.

Exemple

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 4 & 0 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+5 & 2-2 \\ 3+4 & 4+0 \\ 5-3 & 6+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 7 & 4 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}$$

Produit d'une matrice par un scalaire¹ :

Soit $A = [a_{jk}]$ une matrice de taille $m \times n$ et soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Le produit de la matrice A par le scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$ est la matrice de taille $m \times n$, notée λA , donnée par

$$\lambda A = \lambda \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda a_{11} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{bmatrix}$$

Exemple

$$5 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \cdot 1 & 5 \cdot 2 \\ 5 \cdot 3 & 5 \cdot 4 \\ 5 \cdot 5 & 5 \cdot 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 10 \\ 15 & 20 \\ 25 & 30 \end{bmatrix}$$

1. Pour les physiciens, un scalaire est une quantité physique qui ne comporte qu'une grandeur. Pour les mathématiciens, un scalaire est un nombre.

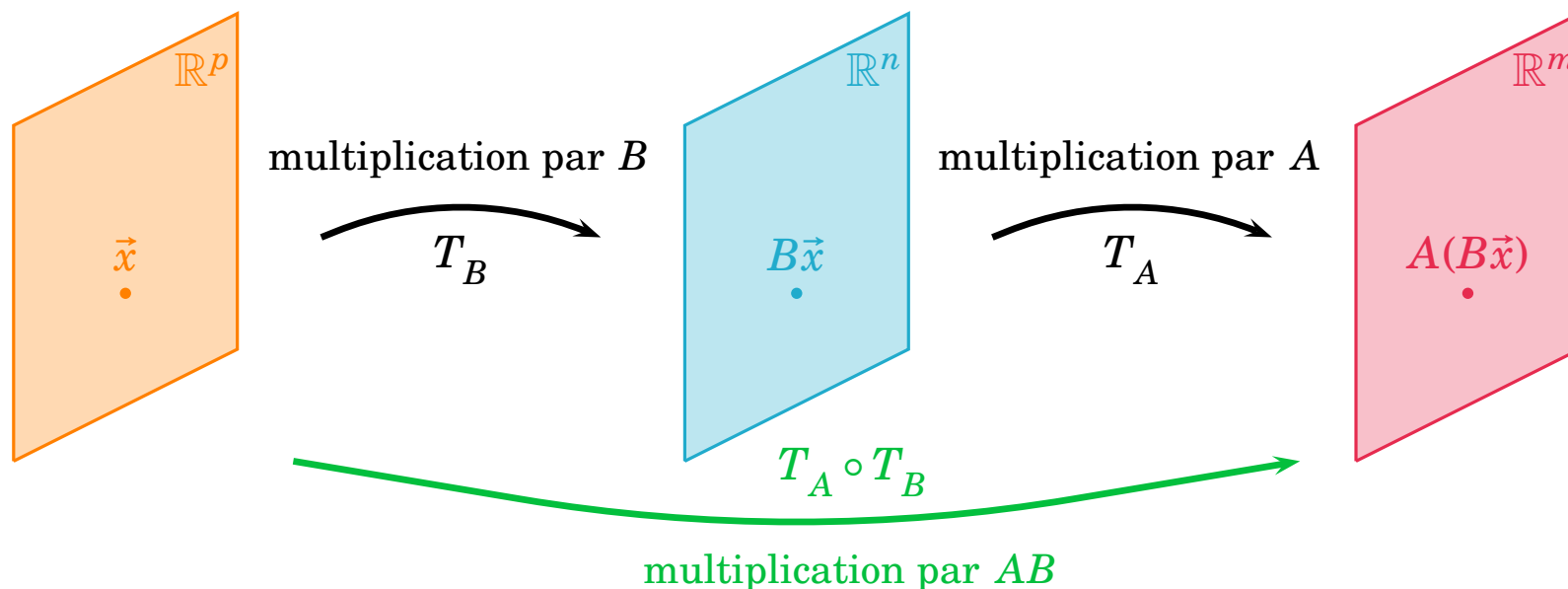
Théorème. Soient A , B et C des matrices de même taille et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ des scalaires.

- a)** $A + B = B + A$ (commutativité de l'addition)
- b)** $A + (B + C) = (A + B) + C$ (associativité de l'addition)
- c)** $A + O = A$ (élément neutre pour l'addition)
- d)** $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$
- e)** $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$
- f)** $\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$

Multiplication matricielle :

Soit A une matrice de taille $m \times n$ et soit $T_A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ l'application linéaire associée.

Soit B une matrice de taille $n \times p$ et soit $T_B: \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^n$ l'application linéaire associée.



Par construction, l'image d'un vecteur $\vec{x} \in \mathbb{R}^p$ par la composition $T_A \circ T_B: \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^m$ est

$$(T_A \circ T_B)(\vec{x}) = T_A(T_B(\vec{x})) = T_A(B\vec{x}) = A(B\vec{x}).$$

La matrice de taille $m \times p$ canoniquement associée à la composition $T_A \circ T_B: \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^m$ est appelée *matrice produit de A et B*, notée AB . Nous avons donc

$$(AB)\vec{x} = A(B\vec{x}), \quad \text{pour tout } \vec{x} \in \mathbb{R}^p.$$

Comme

$$B = \begin{bmatrix} \vec{b}_1 & \vec{b}_2 & \cdots & \vec{b}_p \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad B\vec{x} = x_1\vec{b}_1 + x_2\vec{b}_2 + \cdots + x_p\vec{b}_p,$$

nous avons

$$\begin{aligned} (AB)\vec{x} &= A(B\vec{x}) \\ &= A(x_1\vec{b}_1 + x_2\vec{b}_2 + \cdots + x_p\vec{b}_p) \\ &= x_1(A\vec{b}_1) + x_2(A\vec{b}_2) + \cdots + x_p(A\vec{b}_p) \\ &= \begin{bmatrix} A\vec{b}_1 & A\vec{b}_2 & \cdots & A\vec{b}_p \end{bmatrix} \vec{x}, \quad \text{pour tout } \vec{x} \in \mathbb{R}^p. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$AB = \begin{bmatrix} A\vec{b}_1 & A\vec{b}_2 & \cdots & A\vec{b}_p \end{bmatrix}.$$

Autrement dit,

$$A \begin{bmatrix} \vec{b}_1 & \vec{b}_2 & \cdots & \vec{b}_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A\vec{b}_1 & A\vec{b}_2 & \cdots & A\vec{b}_p \end{bmatrix}.$$

Exemple

Considérons $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 1 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} \vec{b}_1 & \vec{b}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$.

Nous avons

$$A\vec{b}_1 = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 1 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = 1 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} -4 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 16 \end{bmatrix}$$

$$A\vec{b}_2 = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 1 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} = 4 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + 5 \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} + 6 \begin{bmatrix} -4 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 34 \end{bmatrix}$$

d'où

$$AB = \begin{bmatrix} A\vec{b}_1 & A\vec{b}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -1 \\ 16 & 34 \end{bmatrix}$$

Règle « ligne-colonne » du produit matriciel :

Soient

$$\begin{aligned} A &= [a_{jk}] \in M_{m,n}(\mathbb{R}), & \text{avec } 1 \leq j \leq m \text{ et } 1 \leq k \leq n, \\ B &= [b_{k\ell}] \in M_{n,p}(\mathbb{R}), & \text{avec } 1 \leq k \leq n \text{ et } 1 \leq \ell \leq p. \end{aligned}$$

Le produit des matrices A et B , noté AB , est la matrice de taille $m \times p$ dont les coefficients sont donnés par :

$$c_{j\ell} = a_{j1}b_{1\ell} + a_{j2}b_{2\ell} + a_{j3}b_{3\ell} + \dots + a_{jn}b_{n\ell} = \sum_{k=1}^n a_{jk}b_{k\ell}$$

Ainsi, le coefficient $c_{j\ell}$ est égal au produit scalaire de la j -ème ligne de A avec la ℓ -ème colonne de B :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & \cdots & b_{2p} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & \cdots & b_{3p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & b_{n3} & \cdots & b_{np} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & \cdots & c_{1p} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & \cdots & c_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & c_{m3} & \cdots & c_{mp} \end{bmatrix}.$$

Attention : le produit de A et B n'est pas défini si le nombre de colonnes de A n'est pas égal au nombre de lignes de B .

Exemple

$$\text{Si } A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 1 & 0 & 5 \end{bmatrix} \text{ et } B = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}, \text{ alors}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 1 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + (-4) \cdot 3 & 2 \cdot 4 + 3 \cdot 5 + (-4) \cdot 6 \\ 1 \cdot 1 + 0 \cdot 2 + 5 \cdot 3 & 1 \cdot 4 + 0 \cdot 5 + 5 \cdot 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -1 \\ 16 & 34 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 1 & 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 2 + 4 \cdot 1 & 1 \cdot 3 + 4 \cdot 0 & 1 \cdot (-4) + 4 \cdot 5 \\ 2 \cdot 2 + 5 \cdot 1 & 2 \cdot 3 + 5 \cdot 0 & 2 \cdot (-4) + 5 \cdot 5 \\ 3 \cdot 2 + 6 \cdot 1 & 3 \cdot 3 + 6 \cdot 0 & 3 \cdot (-4) + 6 \cdot 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 3 & 16 \\ 9 & 6 & 17 \\ 12 & 9 & 18 \end{bmatrix}$$

Remarque. Il est toujours possible de multiplier des matrices carrées de même taille.

Attention : Même si les produits AB et BA sont définis, en général nous avons

$$AB \neq BA.$$

Par exemple, si

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

alors nous avons

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad BA = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \neq AB$$

De plus, nous remarquons qu'il est possible d'avoir un produit de deux matrices non nulles qui est égal à la matrice nulle :

$$AB = O \quad \text{avec } A \neq O \text{ et } B \neq O.$$

Puissance d'une matrice :

Les puissances entières non négatives d'une matrice carrée A sont définies comme suit :

$$A^0 = I, \quad A^1 = A, \quad A^2 = AA, \quad A^k = \underbrace{AA \cdots A}_{k \text{ fois}}$$

Théorème. Soit A une matrice de taille $m \times n$, et B et C deux matrices telles que les sommes et les produits ci-dessous aient un sens.

- a)** $A(BC) = (AB)C$ (associativité du produit)
- b)** $A(B + C) = AB + AC$ (distributivité à gauche)
- c)** $(B + C)A = BA + CA$ (distributivité à droite)
- d)** $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$
- e)** $I_m A = A = A I_n$ (élément neutre pour la multiplication)

Preuve.

- a)** Soient B une matrice de taille $n \times p$ et C une matrice de taille $p \times q$. Par définition,

$$BC = B \begin{bmatrix} \vec{c}_1 & \vec{c}_2 & \cdots & \vec{c}_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B\vec{c}_1 & B\vec{c}_2 & \cdots & B\vec{c}_q \end{bmatrix}$$

d'où

$$\begin{aligned} A(BC) &= A \begin{bmatrix} B\vec{c}_1 & B\vec{c}_2 & \cdots & B\vec{c}_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A(B\vec{c}_1) & A(B\vec{c}_2) & \cdots & A(B\vec{c}_q) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (AB)\vec{c}_1 & (AB)\vec{c}_2 & \cdots & (AB)\vec{c}_q \end{bmatrix} = (AB) \begin{bmatrix} \vec{c}_1 & \vec{c}_2 & \cdots & \vec{c}_q \end{bmatrix} \\ &= (AB)C \end{aligned}$$

- b) – e)** À faire (voir exercice 9 de la série 5). ■

Transposée d'une matrice

Définition. Soit A une matrice de taille $m \times n$. On définit la *matrice transposée de A* , notée A^T comme la matrice de taille $n \times m$ dont les colonnes sont les lignes de A .

Exemple

$$\text{Si } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \text{ alors } A^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

Théorème. Soient A et B deux matrices telles que les sommes et les produits ci-dessous aient un sens.

- a) $(A^T)^T = A$
- b) $(A + B)^T = A^T + B^T$
- c) $(\lambda A)^T = \lambda A^T$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$
- d) $(AB)^T = B^T A^T$

Preuve.

- a) – c) Conséquence directe de la définition.
- d) À faire (voir exercice 9 de la série 5). ■

Définition. Soit A une matrice carrée de taille $n \times n$.

On dit que A est *symétrique* si $A^T = A$.

On dit que A est *antisymétrique* si $A^T = -A$.

Exemple

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ est symétrique et $A = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$ est antisymétrique.

2.2. Matrices inversibles

Définition. Une matrice carrée $A = [a_{jk}] \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ est *inversible* s'il existe une matrice carrée $B = [b_{jk}] \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ telle que

$$AB = I_n \quad \text{et} \quad BA = I_n$$

où

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

est la matrice identité de $M_{n,n}(\mathbb{R})$.

Remarque. Si A est une matrice inversible, alors la matrice B de la définition est unique. En effet, si B et C sont deux matrices telles que $AB = I_n = BA$ et $AC = I_n = CA$ alors

$$\left. \begin{array}{l} C(AB) = CI_n = C \\ (CA)B = I_n B = B \end{array} \right\} \implies B = C$$

Définition. L'unique matrice de taille $n \times n$, notée A^{-1} , telle que

$$AA^{-1} = I_n \quad \text{et} \quad A^{-1}A = I_n$$

est appelée *matrice inverse de A* .

Proposition. Si $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ est inversible alors $A^{-1} \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ est aussi inversible et

$$(A^{-1})^{-1} = A.$$

Preuve. Par définition, $AA^{-1} = I_n$ et $A^{-1}A = I_n$ et de ce fait, A est l'inverse de A^{-1} . ■

Proposition. Si $A, B \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ sont deux matrices inversibles, alors

$$AB \in M_{n,n}(\mathbb{R}) \text{ est inversible} \quad \text{et} \quad (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

Preuve. Nous avons

$$AB(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AI_nA^{-1} = AA^{-1} = I_n$$

$$(B^{-1}A^{-1})AB = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}I_nB = B^{-1}B = I_n$$
 ■

Proposition. Si $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ est une matrice inversible et $\lambda \in \mathbb{R}$ est tel que $\lambda \neq 0$, alors

$$\lambda A \in M_{n,n}(\mathbb{R}) \text{ est inversible} \quad \text{et} \quad (\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda} A^{-1}.$$

Preuve. Nous avons

$$\lambda A \left(\frac{1}{\lambda} A^{-1} \right) = \lambda \frac{1}{\lambda} (AA^{-1}) = I_n$$

$$\left(\frac{1}{\lambda} A^{-1} \right) \lambda A = \lambda \frac{1}{\lambda} (A^{-1}A) = I_n$$
 ■

Question. Comment déterminer si A est inversible?

Exemple

Déterminer si $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}$ est inversible. Si oui, calculer A^{-1} .

Nous cherchons une matrice $A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ telle que $AA^{-1} = I_2$ et $A^{-1}A = I_2$.

Nous avons

$$AA^{-1} = I_2 \iff \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \iff \begin{bmatrix} a+4c & b+4d \\ -a-3c & -b-3d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Nous devons résoudre deux systèmes :

$$\begin{cases} a+4c = 1 \\ -a-3c = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} b+4d = 0 \\ -b-3d = 1 \end{cases}$$

La réduction des matrices augmentées associées aux deux systèmes nous donne :

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 4 & 1 \\ -1 & -3 & 0 \end{array} \right] &\xrightarrow{L_2 \rightarrow L_2 + L_1} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{array} \right] &\xrightarrow{L_1 \rightarrow L_1 - 4L_2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{array} \right] &\implies \begin{cases} a = -3 \\ c = 1 \end{cases} \\ \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 4 & 0 \\ -1 & -3 & 1 \end{array} \right] &\xrightarrow{L_2 \rightarrow L_2 + L_1} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{array} \right] &\xrightarrow{L_1 \rightarrow L_1 - 4L_2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 1 \end{array} \right] &\implies \begin{cases} b = -4 \\ d = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Par conséquent, la matrice A est inversible et nous avons

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & -4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Vérification :

$$AA^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & -4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3+4 & -4+4 \\ 3-3 & 4-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1}A = \begin{bmatrix} -3 & -4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3+4 & -12+12 \\ 1-1 & 4-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Idée : Résoudre les deux systèmes en même temps :

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 4 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{L_2 \rightarrow L_2 + L_1} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{L_1 \rightarrow L_1 - 4L_2} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right]$$

Constat : La réduction de Gauss-Jordan de la matrice $[A \mid I_2]$ nous donne dans ce cas la matrice $[I_2 \mid A^{-1}]$.

Nous verrons plus tard que lorsque A est une matrice inversible de taille $n \times n$ quelconque, la matrice inverse A^{-1} peut être calculée exactement de la même manière :

$$[A \mid I_n] \rightsquigarrow [I_n \mid A^{-1}]$$

Cas particulier

Si $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, alors nous distinguons deux cas :

- Si $ad - bc \neq 0$, alors la matrice A est inversible et nous avons une formule explicite pour calculer l'inverse :

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

- Si $ad - bc = 0$, alors la matrice A n'est pas inversible.

Le nombre $ad - bc$ « détermine » donc si la matrice A est inversible ou pas ! Ce nombre est appelé le *déterminant* de la matrice A , noté $\det(A)$.

Nous verrons au Chapitre 3 comment définir le déterminant pour des matrices carrées de taille $n \times n$ avec $n \geq 3$.