
1. Equations linéaires

1.1. Systèmes d'équations linéaires

Motivation

Problème 1

Soient a et b deux nombres réels. Trouver un nombre réel x tel que $ax = b$.

Nous distinguons deux cas :

- ➡ si $a \neq 0$ alors $x = \frac{b}{a}$ (solution unique)
- ➡ si $a = 0$ alors nous avons deux possibilités :
 - si $b = 0$ nous avons $0 = 0$ et x peut être quelconque (infinité de solutions)
 - si $b \neq 0$ il n'y a pas de solution

Problème 2

a) Trouver deux nombres réels x et y tels que

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

Dans ce cas nous avons une solution unique :

$$\begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases}$$

b) Trouver deux nombres réels x et y tels que

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ 2x + 2y = 10 \end{cases}$$

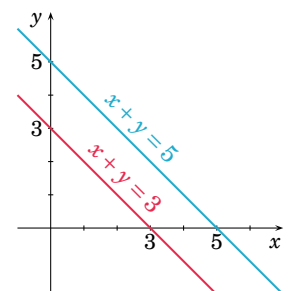
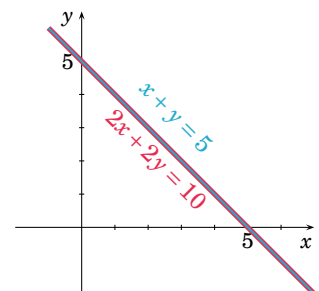
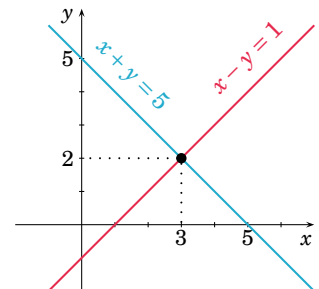
Dans ce cas nous avons une infinité de solutions :

$$y = 5 - x$$

c) Trouver deux nombres réels x et y tels que

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ x + y = 3 \end{cases}$$

Dans ce cas il n'y a pas de solution.



Définition. Une *équation linéaire à n variables* $x_1, x_2, \dots, x_n$ est une expression de la forme

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \dots + a_nx_n = b, \quad \text{où } a_1, a_2, \dots, a_n \text{ et } b \text{ sont des constantes.}$$

Les variables d'une équation linéaire sont souvent appelées *inconnues*.

Définition. Soient m et n des nombres entiers positifs.

Un *système d'équations linéaires à m équations et n inconnues* $x_1, x_2, \dots, x_n$ est un ensemble de m équations linéaires qui peut s'écrire sous la forme :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 & (1) \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 & (2) \\ \vdots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \dots + a_{mn}x_n = b_m & (m) \end{cases} \quad (*)$$

où les nombres $a_{jk} \in \mathbb{R}$ (avec $j = 1, 2, \dots, m$ et $k = 1, 2, \dots, n$) sont appelés *coefficients* du système et les nombres $b_1, b_2, \dots, b_m \in \mathbb{R}$ sont appelés *termes inhomogènes* du système.

Une *solution* de (*) est un n -tuple $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ qui satisfait chaque équation du système.

La *solution générale* du système est l'ensemble de toutes les solutions de (*). Elle est aussi appelée *ensemble solution*.

Un système d'équations linéaires est *consistant* (ou *compatible*) s'il possède au moins une solution. Dans le cas contraire, le système est *inconsistant* (ou *incompatible*).

Problème : Etant donné un système d'équations linéaires, déterminer s'il est consistant ou pas et si c'est le cas, déterminer la solution générale.

Théorème. Chaque système d'équations linéaires possède ou bien aucune, ou bien une ou bien une infinité de solutions. Il n'y a pas d'autre possibilité.

Proposition. La solution générale du système

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 & (1) \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 & (2) \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \dots + a_{3n}x_n = b_3 & (3) \\ \vdots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \dots + a_{mn}x_n = b_m & (m) \end{cases} \quad (*)$$

est la même que celle du système obtenu à partir de (*) à l'aide des *opérations élémentaires* suivantes :

- 1) Echanger l'ordre des équations.
- 2) Multiplier une équation par un nombre non-nul.
- 3) Remplacer une équation du système par la somme de cette équation avec un multiple d'une autre équation du système.

Question. Comment résoudre un système d'équations ?

Considérons par exemple

$$\begin{cases} x + 2y = -1 & (1) \\ 3x + 7y = 1 & (2) \end{cases}$$

En remplaçant l'équation (2) par $(2) - 3 \cdot (1)$ nous obtenons :

$$\begin{cases} x + 2y = -1 \\ y = 4 \end{cases}$$

Ainsi, $y = 4$, $x = -1 - 2 \cdot 4$ et la solution cherchée est

$$\begin{cases} x = -9 \\ y = 4 \end{cases}$$

Vérification :

$$\begin{cases} -9 + 2 \cdot 4 = -1, \\ 3(-9) + 7 \cdot 4 = 1. \end{cases}$$

Remarque. Lorsque le nombre d'équations et le nombre d'inconnues est plus grand que deux, le calcul se fait de manière plus systématique à l'aide de matrices.

Définition. Une *matrice* de taille $m \times n$ est un tableau rectangulaire de mn nombres réels disposés sur m lignes et n colonnes. Les éléments de la matrice sont appelés *coefficients* (ou *éléments*) de la matrice.

Nous utilisons des lettres majuscules pour noter les matrices :

$$A, B, \dots$$

et des lettres minuscules pour les coefficients :

a_{jk} est le coefficient de la matrice A situé à la j -ème ligne et la k -ème colonne.

Une matrice de taille $m \times n$ a la forme générale suivante :

$$A = \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}}_{n \text{ colonnes}} \left. \vphantom{\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}} \right\} m \text{ lignes}$$

Exemple

La matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 4 & 0 & 7 \end{bmatrix}$ est une matrice de taille 2×3 où

$$a_{11} = 1, a_{12} = 3, a_{13} = 5, a_{21} = 4, a_{22} = 0, a_{23} = 7.$$

Notation : L'ensemble des matrices de taille $m \times n$ à coefficients dans $\mathbb{R}$ est noté $M_{m,n}(\mathbb{R})$.

De plus, nous utilisons parfois la notation

$$A = [a_{jk}]$$

plutôt que

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Nous utilisons aussi la notation

$$A = [\vec{a}_1 \quad \vec{a}_2 \quad \cdots \quad \vec{a}_n]$$

où

$$\vec{a}_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}, \vec{a}_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix}, \dots, \vec{a}_n = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix},$$

sont les n colonnes de la matrice A .

Notation matricielle d'un système d'équations linéaires

Considérons le système d'équations linéaires à m équations et n inconnues suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \quad (1) \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \quad (2) \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \cdots + a_{3n}x_n = b_3 \quad (3) \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \quad (m) \end{array} \right. \quad (*)$$

Définition. La matrice de taille $m \times (n + 1)$ suivante :

$$[A \mid \vec{b}] = \left[\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} & b_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array} \right] \left. \vphantom{\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}} \right\} \begin{array}{l} m \text{ lignes} \\ n + 1 \text{ colonnes} \end{array} \quad (**)$$

est appelée *matrice augmentée associée au système (*)*.

La matrice $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ est appelée *matrice des coefficients du système (*)*.

Le vecteur $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$ est appelé le *vecteur des termes inhomogènes*.

Opérations élémentaires sur les lignes

Comme les lignes de la matrice augmentée correspondent aux équations du système, les opérations élémentaires sur le système nous donnent des opérations élémentaires sur les lignes L_j de la matrice augmentée $[A | \vec{b}]$:

1) échanger deux lignes :

$$L_j \longleftrightarrow L_k$$

2) multiplier une ligne par un nombre λ non-nul :

$$L_j \longrightarrow \lambda L_j, \quad \text{avec } \lambda \neq 0$$

3) additionner un multiple d'une ligne à une autre ligne :

$$L_k \longrightarrow L_k + \lambda L_j$$

Définition. La matrice A est *équivalente* à la matrice C si C peut être obtenue à partir de A à l'aide d'opérations élémentaires sur les lignes. On note $A \sim C$.

Exemples

Nous avons les équivalences suivantes :

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{array} \right] \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} \left[\begin{array}{cc|cc} 3 & 4 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \right], \quad \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 3 & 4 & 3 & 4 \end{array} \right] \xrightarrow{L_1 \rightarrow 3L_1} \left[\begin{array}{cc|cc} 3 & 6 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 3 & 4 \end{array} \right], \quad \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 0 & -2 \end{array} \right] \xrightarrow{L_2 \rightarrow L_2 - 3L_1} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -3 & -8 \end{array} \right].$$

Théorème. Soient $[A | \vec{b}]$ et $[C | \vec{d}]$ les matrices augmentées associées à deux systèmes d'équations linéaires à m équations et n inconnues.

Si les matrices $[A | \vec{b}]$ et $[C | \vec{d}]$ sont équivalentes, alors les deux systèmes possèdent la même solution.

Preuve. Nous avons vu que les opérations élémentaires sur les équations d'un système ne changent pas la solution générale du système. Par conséquent, les systèmes associés aux matrices augmentées $[A | \vec{b}]$ et $[C | \vec{d}]$ ont la même solution. ■

Conséquence. Pour trouver la solution générale d'un système d'équations linéaires, nous allons faire des opérations élémentaires sur les lignes de la matrice augmentée associée de manière à obtenir une matrice augmentée associée à un système plus facile à résoudre.

Exemples

1. Considérons à nouveau le système

$$\begin{cases} x + 2y = -1 & (1) \\ 3x + 7y = 1 & (2) \end{cases}$$

Le remplacement de l'équation (2) par $(2) - 3 \cdot (1)$ correspond à l'opération élémentaire sur les lignes $L_2 \rightarrow L_2 - 3L_1$. Nous avons donc

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 7 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{L_2 \rightarrow L_2 - 3L_1} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -1 \\ 3 - 3 \cdot 1 & 7 - 3 \cdot 2 & 1 - 3 \cdot (-1) \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \end{array} \right]$$

et nous retrouvons le système

$$\begin{cases} x + 2y = -1 \\ y = 4 \end{cases}$$

Plutôt que de faire la substitution de $y = 4$ dans la première équation, nous pouvons faire l'opération élémentaire sur les lignes $L_1 \rightarrow L_1 - 2L_2$ pour trouver

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \end{array} \right] \xrightarrow{L_1 \rightarrow L_1 - 2L_2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 - 2 \cdot 0 & 2 - 2 \cdot 1 & -1 - 2 \cdot 4 \\ 0 & 1 & 4 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -9 \\ 0 & 1 & 4 \end{array} \right]$$

ce qui nous donne la solution directement :

$$\begin{cases} x = -9 \\ y = 4 \end{cases}$$

2. Considérons la matrice augmentée

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right]$$

associée au système d'équations

$$\begin{cases} x - y - 2z = 1 & (1) \\ y + 4z = 5 & (2) \\ z = 3 & (3) \end{cases}$$

Ce système peut être résolu à l'aide de la « substitution à rebours » :

La dernière équation nous donne $z = 3$. En insérant ce résultat dans (2), nous obtenons

$$y = 5 - 4 \cdot 3 \quad \Rightarrow \quad y = -7$$

En remplaçant $z = 3$ et $y = -7$ dans (1), nous trouvons

$$x = 1 + (-7) + 2 \cdot 3 \quad \Rightarrow \quad x = 0$$

Ainsi la solution du système est unique :

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = -7 \\ z = 3 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -7 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Matrices échelonnées

Considérons une matrice quelconque. On dit qu'une ligne de la matrice est une *ligne nulle* si elle est constituée entièrement de zéros. Si une ligne n'est pas nulle, on appelle *coefficient principal* son coefficient non nul situé le plus à gauche. Si le coefficient principal est égal à 1, on l'appelle *pivot*.

Définition. Une matrice est dite *échelonnée* si elle possède les deux propriétés suivantes :

- 1) Toutes les lignes non nulles de la matrice sont situées au-dessus des lignes nulles.
- 2) Le coefficient principal d'une ligne est toujours situé à droite de celui de la ligne au-dessus.

Exemples

Les matrices suivantes sont échelonnées :

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 8 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

Par contre, les matrices suivantes ne le sont pas :

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 2 & 1 & 8 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Méthode d'élimination de Gauss

L'élimination de Gauss consiste à résoudre un système d'équations linéaires en effectuant des opérations élémentaires sur les lignes de la matrice augmentée associée de manière à obtenir une matrice échelonnée équivalente.

L'algorithme servant à résoudre un système d'équations par élimination de Gauss est simple. Il comprend généralement les étapes suivantes :

- 1) Ecrire la matrice augmentée du système d'équations à résoudre :

$$\left[\begin{array}{cccc|c} * & * & * & \cdots & * \\ * & * & * & \cdots & * \\ * & * & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & * & * & \cdots & * \end{array} \right]$$

(où les * représentent les coefficients et les termes inhomogènes du système).

- 2) Si nécessaire, échanger la première ligne avec une autre de manière à avoir $a_{11} \neq 0$.

- 3) Si $a_{j1} = 1$ pour un certain j , échanger la j -ème ligne avec la première ligne. Autrement, diviser la première ligne par $a_{11} \neq 0$ ou ajouter le multiple d'une autre ligne :

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} * & * & * & \cdots & * & * \\ * & * & * & \cdots & * & * \\ * & * & * & \cdots & * & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ * & * & * & \cdots & * & * \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccccc|c} \mathbf{1} & * & * & \cdots & * & * \\ * & * & * & \cdots & * & * \\ * & * & * & \cdots & * & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ * & * & * & \cdots & * & * \end{array} \right]$$

- 4) Pour $j \geq 2$, remplacer la ligne L_j par $L_j - a_{j1}L_1$, de manière à introduire des zéros au dessous du pivot :

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} \mathbf{1} & * & * & \cdots & * & * \\ * & * & * & \cdots & * & * \\ * & * & * & \cdots & * & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ * & * & * & \cdots & * & * \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccccc|c} \mathbf{1} & * & * & \cdots & * & * \\ \mathbf{0} & * & * & \cdots & * & * \\ \mathbf{0} & * & * & \cdots & * & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0} & * & * & \cdots & * & * \end{array} \right]$$

- 5) Répéter les pas 2) – 4) sur la sous-matrice augmentée obtenue en ignorant la première ligne et les premières colonnes de coefficients formées exclusivement de zéros. S'arrêter si toutes les colonnes de coefficients sont nulles :

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} \mathbf{1} & * & * & \cdots & * & * \\ \mathbf{0} & * & * & \cdots & * & * \\ \mathbf{0} & * & * & \cdots & * & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0} & * & * & \cdots & * & * \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccccc|c} \mathbf{1} & * & * & \cdots & * & * \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & * & \cdots & * & * \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & * & \cdots & * & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & * & \cdots & * & * \end{array} \right]$$

Répéter la procédure autant que possible :

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} \mathbf{1} & * & * & \cdots & * & * \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & * & \cdots & * & * \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & * & \cdots & * & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & * & \cdots & * & * \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccccc|c} \mathbf{1} & * & * & \cdots & * & * \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & * & \cdots & * & * \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \cdots & * & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & * & * \end{array} \right]$$

- 6) Considérer le système associé à la matrice augmentée ainsi obtenue et le résoudre.

Exemples

Déterminer la solution générale (si elle existe) des systèmes d'équations linéaires suivants :

$$1. \begin{cases} x + y + 2z = 9 \\ 3x + 6y - 5z = 0 \\ 2x + 4y - 3z = 1 \end{cases}$$

matrice augmentée :

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \end{array} \right] & \xrightarrow[\substack{L_2 \rightarrow L_2 - 3L_1 \\ L_3 \rightarrow L_3 - 2L_1}]{\substack{L_2 \rightarrow L_2 - 3L_1 \\ L_3 \rightarrow L_3 - 2L_1}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 3 & -11 & -27 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \end{array} \right] \\ & \xrightarrow{L_2 \leftrightarrow L_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \\ 0 & 3 & -11 & -27 \end{array} \right] \\ & \xrightarrow{L_3 \rightarrow L_3 - 2L_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \\ 0 & 1 & -4 & -10 \end{array} \right] \\ & \xrightarrow{L_2 \rightarrow L_2 - 2L_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -4 & -10 \\ 0 & 1 & -4 & -10 \end{array} \right] \\ & \xrightarrow{L_1 \rightarrow L_1 - L_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 6 & 19 \\ 0 & 1 & -4 & -10 \\ 0 & 1 & -4 & -10 \end{array} \right] \\ & \xrightarrow{L_3 \rightarrow L_3 - L_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 6 & 19 \\ 0 & 1 & -4 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \end{aligned}$$

système associé :

$$\begin{cases} x + y + 2z = 9 & (1) \\ y - 4z = -10 & (2) \\ z = 3 & (3) \end{cases}$$

On remplace $z = 3$ dans (2) :

$$y - 4 \cdot 3 = -10 \implies y = -10 + 12 \implies y = 2$$

On remplace $z = 3$ et $y = 2$ dans (1) :

$$x + 2 + 2 \cdot 3 = 9 \implies x = 9 - 2 - 6 \implies x = 1$$

$$\text{Solution unique : } \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = 3 \end{cases}$$

$$\text{Notation vectorielle : } \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Vérification :

$$\begin{cases} 1 + 2 + 2 \cdot 3 = 9 \\ 3 \cdot 1 + 6 \cdot 2 - 5 \cdot 3 = 0 \\ 2 \cdot 1 + 4 \cdot 2 - 3 \cdot 3 = 1 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} x - 2y - z = 1 \\ 3x + y - 4z = 2 \\ 4x - y - 5z = 6 \end{cases}$$

matrice augmentée :

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -4 & 2 \\ 4 & -1 & -5 & 6 \end{array} \right] \xrightarrow[L_3 \rightarrow L_3 - 4L_1]{L_2 \rightarrow L_2 - 3L_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 1 \\ 3-3 \cdot 1 & 1-3(-2) & -4-3(-1) & 2-3 \cdot 1 \\ 4-4 \cdot 1 & -1-4(-2) & -5-4(-1) & 6-4 \cdot 1 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 7 & -1 & -1 \\ 0 & 7 & -1 & 2 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{L_3 \rightarrow L_3 - L_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 7 & -1 & -1 \\ 0 & 7-7 & -1+1 & 2+1 \end{array} \right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 7 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array} \right]$$

L'équation associée à L_3 est

$$0x + 0y + 0z = 3 \iff 0 = 3 \text{ impossible}$$

Par conséquent, le système n'a pas de solution.

Remarque. Si pendant l'échelonnement une des lignes a la forme :

$$0 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0 \mid b \quad \text{avec } b \neq 0,$$

nous arrêtons l'échelonnement et concluons que le système ne possède pas de solution car l'équation associée à cette ligne est

$$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + \dots + 0x_n = b \neq 0.$$

Dans le cas contraire, nous avons un certain nombre de lignes nulles :

$$0 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0 \mid 0$$

situées en bas de la matrice et le système est consistant.

Soit $r > 0$ le nombre de lignes non-nulles d'une matrice échelonnée associée à un système à m équations et n inconnues.

Par construction nous avons $r \leq m$.

Nous distinguons deux cas :

- $r = n$: Nous avons un système de r équations à r inconnues et la solution est unique.
- $r < n$: Nous avons plus d'inconnues que d'équations et de ce fait, une infinité de solutions.

Matrices échelonnées-réduites

Si une matrice échelonnée possède r lignes non-nulles, avec $r < n$, alors le système associé a une infinité de solutions. Pour expliciter ces solutions, il peut s'avérer utile d'effectuer des opérations élémentaires sur les lignes de la matrice augmentée de manière à obtenir une matrice échelonnée-réduite équivalente.

Définition. Une matrice est dite *échelonnée-réduite* si elle est échelonnée, telle que tous les coefficients principaux sont des pivots (c'est-à-dire égaux à 1) et si dans toute colonne qui contient un pivot, tous les autres éléments sont nuls.

Exemples

Les matrices suivantes sont échelonnées-réduites :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 8 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Les matrices suivantes **ne sont pas** échelonnées-réduites :

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 8 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Méthode de réduction de Gauss-Jordan

- 1) Echelonner la matrice augmentée associée au système.
- 2) Si $r < n$, réduire la matrice échelonnée.
- 3) Considérer le système associé à la matrice augmentée ainsi obtenue et le résoudre.

Remarque.

Lorsque la solution d'un système d'équations linéaires est unique, l'élimination de Gauss suivie de la «substitution à rebours» est plus rapide que la réduction de Gauss-Jordan. Toutefois, pour des systèmes «petits» (jusqu'à 4-5 équations/inconnues), le temps de calcul «à la main» est comparable.

Définition.

- Les variables associées aux *pivots* s'appellent *variables principales* ou *variables liées*.
- Les variables associées aux colonnes *sans pivot* s'appellent *variables secondaires* ou *variables libres*.

Exemples

Déterminer la solution générale (si elle existe) des systèmes d'équations linéaires suivants :

$$1. \begin{cases} 2x - 3y + 4z = 0 \\ x - y + 3z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \end{cases}$$

Matrice augmentée :

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 4 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \end{array} \right] &\xrightarrow{L_2 \rightarrow L_2 - L_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \end{array} \right] &\xrightarrow{\substack{L_2 \rightarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \rightarrow L_3 - L_1}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \\ &\xrightarrow{L_1 \rightarrow L_1 + 2L_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \\ &\quad \begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ x & y & z \end{array} \end{aligned}$$

Système associé :

$$\begin{cases} x + 5z = 0 \\ y + 2z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -5z \\ y = -2z \end{cases}$$

Si $z = t$, avec $t \in \mathbb{R}$ quelconque, alors

$$\begin{cases} x = -5t, \\ y = -2t, \\ z = t, \end{cases} \quad \text{avec } t \in \mathbb{R} \quad (\text{infinité de solutions})$$

Notation vectorielle :

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} -5 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \text{avec } t \in \mathbb{R}.$$

Géométriquement, il s'agit de la droite qui passe par l'origine de vecteur directeur $\begin{bmatrix} -5 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Les variables x et y sont principales (ou liées).

La variable z est secondaire (ou libre).

$$2. \begin{cases} x - 5y + 3z + 6u = 14 \\ -2y + 7u = 12 \\ 2x - 5y + 6z - 5u = -1 \end{cases}$$

Comme il y a plus d'inconnues que d'équations, ici il convient de réduire (car il n'y a pas de solution unique).

Matrice augmentée :

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{array} \right] & \xrightarrow{L_3 \rightarrow L_3 - 2L_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 0 & 5 & 0 & -17 & -29 \end{array} \right] & \xrightarrow{L_3 \rightarrow L_3 + 2L_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & -5 \end{array} \right] \\ & \xrightarrow{L_3 \leftrightarrow L_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & -5 \\ 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \end{array} \right] & \xrightarrow{\begin{array}{l} L_1 \rightarrow L_1 + 5L_2 \\ L_3 \rightarrow L_3 + 2L_2 \end{array}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3 & -9 & -11 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right] \\ & \xrightarrow{\begin{array}{l} L_1 \rightarrow L_1 + 9L_3 \\ L_2 \rightarrow L_2 + 3L_3 \end{array}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right] \end{aligned}$$

$\begin{array}{cccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ x & y & z & u \end{array}$

Système associé :

$$\begin{cases} x + 3z = 7 \\ y = 1 \\ u = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 7 - 3z \\ y = 1 \\ u = 2 \end{cases}$$

Si $z = t$, avec $t \in \mathbb{R}$ quelconque, alors

$$\begin{cases} x = 7 - 3t \\ y = 1 \\ z = t \\ u = 2 \end{cases} \quad \text{avec } t \in \mathbb{R} \quad (\text{infinité de solutions})$$

Notation vectorielle :

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 - 3t \\ 1 + 0t \\ 0 + 1t \\ 2 + 0t \end{bmatrix} \implies \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{avec } t \in \mathbb{R}.$$

Les variables x , y et u sont principales (ou liées).

La variable z est secondaire (ou libre).

3. Déterminer les valeurs des paramètres $a, b, c \in \mathbb{R}$ pour lesquels le système

$$\begin{cases} x + y + z = a \\ -x - y + z = b \\ x + y + 3z = c \end{cases}$$

possède des solutions. Déterminer ces solutions.

Nous avons un système à 3 équations et 3 inconnues (x, y, z) .

Matrice augmentée :

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a \\ -1 & -1 & 1 & b \\ 1 & 1 & 3 & c \end{array} \right] \xrightarrow[L_3 \rightarrow L_3 - L_1]{L_2 \rightarrow L_2 + L_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & 0 & 2 & b+a \\ 0 & 0 & 2 & c-a \end{array} \right] \xrightarrow{L_3 \rightarrow L_3 - L_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & 0 & 2 & a+b \\ 0 & 0 & 0 & c-2a-b \end{array} \right]$$

La condition d'existence des solutions est

$$c - 2a - b = 0 \iff c = 2a + b$$

- Si $a, b, c \in \mathbb{R}$ sont tels que $c \neq 2a + b$, alors le système n'a pas de solution
- Si $a, b, c \in \mathbb{R}$ sont tels que $c = 2a + b$, alors le système possède une infinité de solutions

Considérons le cas $c = 2a + b$. Nous avons :

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & 0 & 2 & a+b \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{L_2 \rightarrow \frac{1}{2}L_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2}(a+b) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{L_1 \rightarrow L_1 - L_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & \frac{1}{2}(a-b) \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2}(a+b) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

$\begin{matrix} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ x & y & z \end{matrix}$

Système associé :

$$\begin{cases} x + y = \frac{1}{2}(a-b) \\ z = \frac{1}{2}(a+b) \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{1}{2}(a-b) - y \\ z = \frac{1}{2}(a+b) \end{cases}$$

Si $y = t$, avec $t \in \mathbb{R}$ quelconque, alors

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}(a-b) - t \\ y = t \\ z = \frac{1}{2}(a+b) \end{cases} \quad \text{avec } t \in \mathbb{R} \quad (\text{infinité de solutions})$$

Notation vectorielle :

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(a-b) \\ 0 \\ \frac{1}{2}(a+b) \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \text{avec } t \in \mathbb{R}.$$

Théorème (Théorème d'existence et d'unicité).

Un système linéaire est consistant si et seulement si, lors de l'échelonnement, il n'y a pas de ligne de la forme

$$0 \quad 0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0 \mid b \quad \text{avec } b \neq 0.$$

Si un système linéaire est consistant, alors

- la solution est unique s'il n'y a pas de variables libres,
- le système possède une infinité de solutions s'il y a au moins une variable libre.

Soit m le nombre d'équations du système et soit n le nombre d'inconnues.

Voici quelques situations possibles :

$$m = n$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & * & * & * \\ 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array} \right]$$

pas de solution

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & * & * & * \\ 0 & 1 & * & * \\ 0 & 0 & 1 & * \end{array} \right]$$

solution unique

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & * & * & * \\ 0 & 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

infinité de solutions

$$m > n$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & * & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 7 \end{array} \right]$$

pas de solution

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & * & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

solution unique

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & * & * \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

infinité de solutions

$$m < n$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & * & * & * & * \\ 0 & 1 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{array} \right]$$

pas de solution

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & * & * & * & * \\ 0 & 1 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 & * \end{array} \right]$$

infinité de solutions

Théorème (Unicité de la forme échelonnée-réduite).

Soit A une matrice de taille $m \times n$.

Alors A est équivalente à une unique matrice échelonnée-réduite de taille $m \times n$.

Preuve. Voir l'Annexe A du livre de Lay ou le site Moodle du cours :

<https://moodle.epfl.ch/mod/resource/view.php?id=959673> ■

Exemple

Soit $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$ une matrice de taille 2×3 quelconque.

La matrice A est équivalente à l'une des matrices échelonnées-réduites suivantes :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & * \\ 0 & 1 & * \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & * & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2 \text{ pivots})$$

$$\begin{bmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (1 \text{ pivot})$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (0 \text{ pivots})$$

L'espace $\mathbb{R}^n$

Définition. Une matrice de taille $m \times 1$ (c'est-à-dire formée d'une seule colonne) est appelée *vecteur colonne* ou *vecteur*.

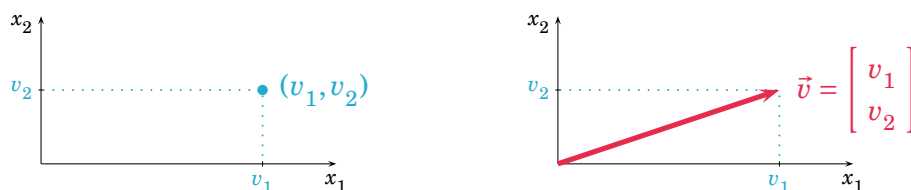
Les coefficients d'un vecteur (colonne) sont appelés *composantes*.

L'ensemble des vecteurs à deux composantes est noté $\mathbb{R}^2$.

Les éléments de $\mathbb{R}^2$ sont de la forme

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}, \quad \text{avec } v_1, v_2 \in \mathbb{R}.$$

Remarque. Nous allons identifier les points du plan avec les vecteurs de $\mathbb{R}^2$:



Le vecteur de composantes v_1 et v_2 sera noté parfois (v_1, v_2) au lieu de $\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$.

Attention : Ne pas confondre (v_1, v_2) avec $[v_1 \ v_2]$ (matrice de taille 1×2).

Opérations dans $\mathbb{R}^2$

Addition :

Si $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^2$, alors

$$\vec{v} + \vec{w} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 + w_1 \\ v_2 + w_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

Multiplication par un scalaire¹ :

Si $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors

$$\lambda \vec{v} = \lambda \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda v_1 \\ \lambda v_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

Remarque. L'ensemble des vecteurs de la forme $\lambda \vec{v}$, avec $\lambda \in \mathbb{R}$, est la droite du plan qui passe par l'origine de vecteur directeur $\vec{v}$.

1. Pour les physiciens, un scalaire est une quantité physique qui ne comporte qu'une grandeur. Pour les mathématiciens, un scalaire est un nombre.

De manière générale, nous pouvons définir $\mathbb{R}^n$, avec $n \geq 3$, comme l'ensemble des vecteurs (colonne) de la forme

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}, \quad \text{avec } v_1, v_2, \dots, v_n \in \mathbb{R},$$

muni des opérations d'addition de vecteurs et multiplication par un scalaire :

- **addition** : si $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n$, alors

$$\vec{v} + \vec{w} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 + w_1 \\ v_2 + w_2 \\ \vdots \\ v_n + w_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

- **multiplication par un scalaire** : si $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors

$$\lambda \vec{v} = \lambda \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda v_1 \\ \lambda v_2 \\ \vdots \\ \lambda v_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

Propriétés algébriques de $\mathbb{R}^n$

(A1) L'addition est commutative :

$$\vec{v} + \vec{w} = \vec{w} + \vec{v}, \quad \text{pour tout } \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n.$$

(A2) L'addition est associative :

$$(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}), \quad \text{pour tout } \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n.$$

(A3) Le vecteur $\vec{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$ est l'élément neutre pour l'addition :

$$\vec{v} + \vec{0} = \vec{v} \quad \text{et} \quad \vec{0} + \vec{v} = \vec{v} \quad \text{pour tout } \vec{v} \in \mathbb{R}^n.$$

(A4) Le vecteur $-\vec{v} = (-1)\vec{v}$ est l'opposé de $\vec{v}$:

$$\vec{v} + (-\vec{v}) = \vec{0} \quad \text{et} \quad (-\vec{v}) + \vec{v} = \vec{0}$$

(A5) Si $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ alors

$$\alpha(\vec{v} + \vec{w}) = \alpha\vec{v} + \alpha\vec{w}.$$

(A6) Si $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ alors

$$(\alpha + \beta)\vec{v} = \alpha\vec{v} + \beta\vec{v}.$$

(A7) Si $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ alors

$$(\alpha\beta)\vec{v} = \alpha(\beta\vec{v}).$$

(A8) Si $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ alors

$$1\vec{v} = \vec{v}.$$

Remarque. Nous verrons plus tard qu'il y a d'autres ensembles qui satisfont ces propriétés. Ce sont les *espaces vectoriels*.

Combinaisons linéaires

Définition. Soient $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k \in \mathbb{R}^n$ des vecteurs donnés.

Le vecteur

$$\vec{v} = \alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 + \dots + \alpha_k \vec{v}_k \in \mathbb{R}^n, \quad \text{avec } \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R},$$

est appelée *combinaison linéaire* des vecteurs $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k$ de poids respectifs $\alpha_1, \dots, \alpha_k$.

Exemple

Comme

$$3 \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 4 \\ -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 15 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 8 \\ -14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ 1 \end{bmatrix},$$

le vecteur $\vec{v} = \begin{bmatrix} 14 \\ 1 \end{bmatrix}$ est combinaison linéaire des vecteurs $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$ et $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ -7 \end{bmatrix}$ de poids respectifs $\alpha_1 = 3$ et $\alpha_2 = 2$.

Question : Considérons les vecteurs suivants :

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{v} = \begin{bmatrix} 11 \\ 19 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

Est-ce que le vecteur $\vec{v}$ peut s'écrire comme combinaison linéaire des vecteurs $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$?
Autrement dit, est-ce qu'il existe des nombres $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ tels que $\vec{v} = \alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2$?

Nous avons :

$$\begin{bmatrix} 11 \\ 19 \\ 6 \end{bmatrix} = \alpha_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ -2 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 + 2\alpha_2 \\ 5\alpha_1 + \alpha_2 \\ -2\alpha_1 + 3\alpha_2 \end{bmatrix} \iff \begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 = 11 \\ 5\alpha_1 + \alpha_2 = 19 \\ -2\alpha_1 + 3\alpha_2 = 6 \end{cases}$$

Matrice augmentée :

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 11 \\ 5 & 1 & 19 \\ -2 & 3 & 6 \end{array} \right] \xrightarrow[L_3 \rightarrow L_3 + 2L_1]{L_2 \rightarrow L_2 - 5L_1} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 11 \\ 0 & -9 & -36 \\ 0 & 7 & 28 \end{array} \right] \xrightarrow[L_3 \rightarrow \frac{1}{7}L_3]{L_2 \rightarrow -\frac{1}{9}L_2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 11 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \end{array} \right] \xrightarrow[L_3 \rightarrow L_3 - L_2]{L_2 \rightarrow L_2 - 5L_1} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

Ainsi, $\vec{v}$ est combinaison linéaire de $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ avec poids respectifs $\alpha_1 = 3$ et $\alpha_2 = 4$.

Remarque. La matrice augmentée est ici $\left[\vec{v}_1 \quad \vec{v}_2 \mid \vec{v} \right]$.

Equations vectorielles

Considérons maintenant l'équation vectorielle

$$x_1 \vec{a}_1 + x_2 \vec{a}_2 + \dots + x_k \vec{a}_k = \vec{b},$$

où $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k, \vec{b} \in \mathbb{R}^n$ sont donnés et $x_1, x_2, \dots, x_k \in \mathbb{R}$ sont à déterminer.

Cette équation vectorielle possède la même solution générale que le système d'équations linéaires associé à la matrice augmentée $\left[\vec{a}_1 \quad \vec{a}_2 \quad \dots \quad \vec{a}_k \mid \vec{b} \right]$.

En particulier, nous avons l'équivalence suivante :

le vecteur $\vec{b}$ est combinaison linéaire de $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k$ $\iff$ le système d'équations linéaires associé à la matrice augmentée $\left[\vec{a}_1 \quad \vec{a}_2 \quad \dots \quad \vec{a}_k \mid \vec{b} \right]$ est consistant

Définition. Soient $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k \in \mathbb{R}^n$ des vecteurs donnés.

Le sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$ formé de toutes les combinaisons linéaires des vecteurs $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k$ est appelé *partie (de $\mathbb{R}^n$) engendrée par les vecteurs $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k \in \mathbb{R}^n$* , noté $\text{Vect}\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k\}$.

Nous avons donc

$$\text{Vect}\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k\} = \{\alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 + \dots + \alpha_k \vec{v}_k \in \mathbb{R}^n : \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^n.$$

En anglais, on note $\text{Span}\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k\}$.

Remarques.

- Par construction, pour chaque $j \in \{1, \dots, k\}$, les vecteurs de la forme $\lambda \vec{v}_j$, avec $\lambda \in \mathbb{R}$, se trouvent dans $\text{Vect}\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k\}$.

En particulier, en prenant $\lambda = 0$, nous trouvons que

$$\vec{0} \in \text{Vect}\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k\},$$

quelque soit le choix des vecteurs $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k$.

- Nous avons les équivalences suivantes :

$$\vec{b} \in \text{Vect}\{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_k\} \iff \text{le vecteur } \vec{b} \text{ est combinaison linéaire de } \vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k$$

$$\iff \text{l'équation vectorielle } x_1 \vec{a}_1 + x_2 \vec{a}_2 + \dots + x_k \vec{a}_k = \vec{b} \text{ possède (au moins) une solution}$$

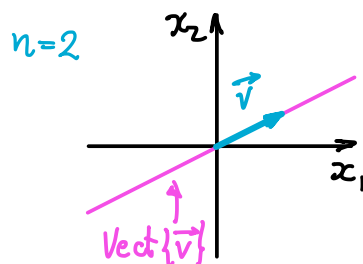
$$\iff \text{le système d'équations linéaires associé à la matrice augmentée } \left[\begin{array}{cccc|c} \vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \dots & \vec{a}_k & \vec{b} \end{array} \right] \text{ est consistant}$$

Interprétation géométrique de $\text{Vect}\{\vec{v}\}$.

– Si $\vec{v} = \vec{0}$, alors $\text{Vect}\{\vec{0}\} = \{\vec{0}\}$

– Si $\vec{v} \neq \vec{0}$, alors $\text{Vect}\{\vec{v}\}$ est la droite de vecteur directeur $\vec{v}$ qui passe par l'origine.

Illustration:



Interprétation géométrique de $\text{Vect}\{\vec{u}, \vec{v}\}$

- Si $\vec{u} = \vec{0}$ et $\vec{v} = \vec{0}$, alors $\text{Vect}\{\vec{u}, \vec{v}\} = \{\vec{0}\}$
- Si $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} = \lambda \vec{u}$ pour un certain $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $\text{Vect}\{\vec{u}, \vec{v}\} = \text{Vect}\{\vec{u}\}$ est la droite de vecteur directeur $\vec{u}$ qui passe par l'origine.
- Si $\vec{u} \neq \vec{0}, \vec{v} \neq \vec{0}$ et s'il n'existe pas $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\vec{u} = \lambda \vec{v}$, alors $\text{Vect}\{\vec{u}, \vec{v}\}$ est le plan de $\mathbb{R}^n$ qui contient $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{0}$.
Cas particulier : si $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^2$, alors $\text{Vect}\{\vec{u}, \vec{v}\} = \mathbb{R}^2$.

Exemple.

Trouver l'équation du plan engendré par $\vec{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$.

Par définition, le plan cherché est $\text{Vect}\{\vec{u}, \vec{v}\}$.

On cherche la condition d'appartenance à $\text{Vect}\{\vec{u}, \vec{v}\}$, autrement dit, la condition d'existence des solutions du système associé à la matrice augmentée. On a :

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & a \\ 2 & 3 & b \\ 3 & 5 & c \end{array} \right] \xrightarrow[\substack{L_2 \rightarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \rightarrow L_3 - 3L_1}]{\sim} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & a \\ 0 & 1 & b-2a \\ 0 & 2 & c-3a \end{array} \right] \xrightarrow{L_3 \rightarrow L_3 - 2L_2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & a \\ 0 & 1 & b-2a \\ 0 & 0 & c-2b+a \end{array} \right]$$

Par conséquent,

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \in \text{Vect}\{\vec{u}, \vec{v}\} \Leftrightarrow c - 2b + a = 0$$

Comme $c=2b-a$, les vecteurs de $\text{Vect}\{\vec{u}, \vec{v}\}$ sont de la forme

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ 2b-a \end{bmatrix}, \text{ avec } a, b \in \mathbb{R}$$

On a donc un critère très simple pour déterminer si un vecteur appartient à $\text{Vect}\{\vec{u}, \vec{v}\}$:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 7 \end{bmatrix} \notin \text{Vect}\{\vec{u}, \vec{v}\} \text{ car } 2 \cdot 0 - 0 = 0 \neq 7.$$

$$\text{Par contre, } \begin{bmatrix} 2024 \\ 2023 \\ 2022 \end{bmatrix} \in \text{Vect}\{\vec{u}, \vec{v}\} \text{ car } 2 \cdot 2023 - 2024 = 2022.$$

Comme les éléments de $\text{Vect}\{\vec{u}, \vec{v}\}$ sont de la forme $\begin{bmatrix} a \\ b \\ 2b-a \end{bmatrix}$

l'équation du plan engendré par $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est donc

$$z = 2y - x \iff x - 2y + z = 0$$

L'équation matricielle $A\vec{x} = \vec{b}$.

Définition. Soit $A = [a_{jk}] = [\vec{a}_1 \ \vec{a}_2 \ \dots \ \vec{a}_n]$ une matrice de taille $m \times n$

de colonnes $\vec{a}_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}$, $\vec{a}_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix}$, $\dots$, $\vec{a}_n = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^m$

et soit $\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$ un vecteur.

On définit le produit de A avec $\vec{x}$, noté $A\vec{x}$, comme le vecteur de $\mathbb{R}^m$ obtenu en prenant la combinaison linéaire des colonnes de A avec comme poids, les composantes de $\vec{x}$:

$$A\vec{x} = x_1 \vec{a}_1 + x_2 \vec{a}_2 + \dots + x_n \vec{a}_n \in \mathbb{R}^m$$

Remarque.

Le produit $A\vec{x}$ est défini si et seulement si, le nombre de colonnes de A est égal au nombre de composantes de $\vec{x}$.

Exemple.

Si $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ (matrice de taille 2×3) et $\vec{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$,

alors par définition,

$$A\vec{x} = 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} + 4 \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 \\ 15 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 12 \\ 24 \end{bmatrix} \Rightarrow A\vec{x} = \begin{bmatrix} 20 \\ 47 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

Rappel.

Si $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$, alors le produit scalaire (euclidien) est défini par

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \dots + u_n v_n = \sum_{j=1}^n u_j v_j.$$

Règle "ligne-colonne".

La j -ème composante du vecteur $A\vec{x} \in \mathbb{R}^m$ est le produit scalaire de la j -ème ligne de A avec le vecteur colonne $\vec{x}$.

Exemple. Soient A et $\vec{x}$ comme dans l'exemple précédent. Alors

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} = 2 + 6 + 12 = 20 \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} = 8 + 15 + 24 = 47$$

$$A\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 \\ 4 \cdot 2 + 5 \cdot 3 + 6 \cdot 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ 47 \end{bmatrix}$$

Remarque.

La règle "ligne-colonne" est pratique pour calculer explicitement les composantes de $A\vec{x}$. Par contre, voir $A\vec{x}$ comme combinaison linéaire des colonnes de A est utile pour des calculs théoriques (démonstrations, etc.)

Théorème.

Soit A une matrice de taille $m \times n$. Soient $\vec{u}, \vec{v}$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$ et soit $\lambda \in \mathbb{R}$ un scalaire. Nous avons:

$$1. A(\vec{u} + \vec{v}) = A\vec{u} + A\vec{v}$$

$$2. A(\lambda \vec{u}) = \lambda(A\vec{u})$$

Preuve.

Si $\vec{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$, alors $\vec{u} + \vec{v} = \begin{bmatrix} u_1 + v_1 \\ \vdots \\ u_n + v_n \end{bmatrix}$ et $\lambda \vec{u} = \begin{bmatrix} \lambda u_1 \\ \vdots \\ \lambda u_n \end{bmatrix}$

$$1. A(\vec{u} + \vec{v}) \stackrel{\text{def}}{=} (u_1 + v_1)\vec{a}_1 + \dots + (u_n + v_n)\vec{a}_n = u_1\vec{a}_1 + v_1\vec{a}_1 + \dots + u_n\vec{a}_n + v_n\vec{a}_n \\ = (u_1\vec{a}_1 + \dots + u_n\vec{a}_n) + (v_1\vec{a}_1 + \dots + v_n\vec{a}_n) = A\vec{u} + A\vec{v}$$

$$2. A(\lambda \vec{u}) \stackrel{\text{def}}{=} (\lambda u_1)\vec{a}_1 + \dots + (\lambda u_n)\vec{a}_n = \lambda(u_1\vec{a}_1 + \dots + u_n\vec{a}_n) \stackrel{\text{def}}{=} \lambda(A\vec{u}) \quad \blacksquare$$

Théorème.

Soit $A = [\vec{a}_1 \ \vec{a}_2 \ \dots \ \vec{a}_n]$ une matrice de taille $m \times n$.

Soit $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$. Alors

- l'équation $A\vec{x} = \vec{b}$, appelée équation matricielle,
- l'équation vectorielle $x_1\vec{a}_1 + x_2\vec{a}_2 + \dots + x_n\vec{a}_n = \vec{b}$,
- le système d'équations linéaires associé à la matrice augmentée

$$[\vec{a}_1 \ \vec{a}_2 \ \dots \ \vec{a}_n \ | \ \vec{b}]$$

possèdent tous les trois le même ensemble solution.

Existence de solutions:

L'équation matricielle $A\vec{x} = \vec{b}$ possède une solution si et seulement si $\vec{b}$ est une combinaison linéaire des colonnes de la matrice A .

Autrement dit,

$$A\vec{x} = \vec{b} \text{ est consistante} \Leftrightarrow \vec{b} \in \text{Vect}\{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n\}$$

Deux questions se posent:

Question 1: Comment déterminer si $\vec{b}$ peut s'écrire comme combinaison linéaire des colonnes de A ?

Question 2: Comment déterminer si l'équation matricielle $A\vec{x} = \vec{b}$ est consistante pour tout choix de $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$?

Exemple.

Soient $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$.

Déterminer sous quelles conditions l'équation $A\vec{x} = \vec{b}$ est consistante.

Autrement dit, sous quelles conditions $\vec{b} \in \text{Vect}\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\}$.

Considérons la matrice augmentée $[A|\vec{b}]$. On a:

$$[A|\vec{b}] = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 4 & b_1 \\ 1 & -1 & 3 & b_2 \\ 1 & -2 & 1 & b_3 \end{array} \right] \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_1 - L_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & b_1 - b_2 \\ 1 & -1 & 3 & b_2 \\ 1 & -2 & 1 & b_3 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{L_2 \rightarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \rightarrow L_3 - L_1}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & b_1 - b_2 \\ 0 & 1 & 2 & 2b_2 - b_1 \\ 0 & 0 & 0 & b_3 - b_1 + b_2 \end{array} \right]$$

Condition d'existence des solutions:

$$b_3 - b_1 + b_2 = 0 \Leftrightarrow b_3 = b_1 - b_2$$

Par conséquent,

$$A\vec{x} = \vec{b} \text{ est consistante} \Leftrightarrow \vec{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_1 - b_2 \end{bmatrix}, \text{ avec } b_1, b_2 \in \mathbb{R}$$

$$\text{Comme } \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_1 - b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1b_1 + 0b_2 \\ 0b_1 + 1b_2 \\ 1b_1 - 1b_2 \end{bmatrix} = b_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + b_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = b_1 \vec{u}_1 + b_2 \vec{u}_2,$$

nous trouvons:

$$A\vec{x} = \vec{b} \text{ est consistante} \Leftrightarrow \vec{b} \in \text{Vect}\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$$

$$\text{Ainsi, } \text{Vect}\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\} = \text{Vect}\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$$

(plan dans $\mathbb{R}^3$ qui contient $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ et $\vec{0}$).

Autrement dit, la partie de $\mathbb{R}^3$ engendrée par les colonnes de A est aussi engendrée par les vecteurs $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$.

En particulier, on vérifie facilement que les colonnes de A s'écrivent comme des combinaisons linéaires des vecteurs $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$:

$$\vec{a}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = 2\vec{u}_1 + \vec{u}_2$$

$$\vec{a}_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix} = -3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = -3\vec{u}_1 - \vec{u}_2$$

$$\vec{a}_3 = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = 4 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = 4\vec{u}_1 + 3\vec{u}_2$$

Remarque. Dans ce cas, on peut montrer que $\vec{a}_3 = 5\vec{a}_1 + 2\vec{a}_2$, d'où

$$\begin{aligned} \text{Vect}\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\} &= \text{Vect}\{\vec{a}_1, \vec{a}_2\} \\ &= \text{Vect}\{\vec{a}_1, \vec{a}_3\} \\ &= \text{Vect}\{\vec{a}_2, \vec{a}_3\} \end{aligned}$$

Théorème .

Soit A une matrice de taille $m \times n$.

Les affirmations suivantes sont équivalentes :

(c-à-d. que pour A donnée, elles sont toutes vraies ou toutes fausses)

1. L'équation matricielle $A\vec{x} = \vec{b}$ est consistante pour tout $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$.
2. Tout vecteur $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$ peut s'écrire comme combinaison linéaire des colonnes de A .
3. Les colonnes de A engendrent $\mathbb{R}^m$: $\text{Vect}\{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n\} = \mathbb{R}^m$
4. La matrice échelonnée-réduite associée à A possède un pivot par ligne.

Preuve.

Les affirmations 1, 2 et 3 sont équivalentes à cause de la définition du produit $A\vec{x}$.

Soit R la forme échelonnée-réduite associée à la matrice A .

Nous avons donc $[A | \vec{b}] \sim [R | \vec{d}]$

Si 4) est vraie, alors la dernière ligne de R est non nulle et l'équation $A\vec{x} = \vec{b}$ est consistante pour tout $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$ et 1) est vraie.

Si 4) est fausse, alors la dernière ligne de R est nulle et lorsque la dernière composante de $\vec{d}$ est non nulle, le système $A\vec{x} = \vec{b}$ n'a pas de solution. Par conséquent, 1) est fausse aussi. ■

Systèmes d'équations linéaires homogènes.

Définition.

Un système d'équations linéaires est appelé **homogène** s'il peut s'écrire sous la forme $A\vec{x} = \vec{0}$ où A est une matrice de taille $m \times n$ et $\vec{0} \in \mathbb{R}^m$.

Conséquence.

Un système homogène est **toujours** consistant car $\vec{x} = \vec{0} \in \mathbb{R}^n$ est une solution du système, appelée **solution triviale**.

Un vecteur non-nul $\vec{x} \neq \vec{0}$ solution du système sera appelée **solution non-triviale**.

Question. Sous quelle condition un système homogène possède des solutions non-triviales ?

Conséquence (du théorème d'existence et unicité des solutions)

Les affirmations suivantes sont équivalentes :

1. $A\vec{x} = \vec{0}$ possède des solutions non-triviales
2. $A\vec{x} = \vec{0}$ possède une infinité de solutions
3. il y a des variables libres
4. il y a des colonnes de A qui ne sont pas associées à des pivots.

Formulation alternative:

Les affirmations suivantes sont équivalentes :

1. $A\vec{x} = \vec{0}$ ne possède pas des solutions non-triviales
2. $A\vec{x} = \vec{0}$ possède une solution unique ($\vec{x} = \vec{0}$)
3. il n'y a pas de variables libres
4. la forme échelonnée-réduite associée à A possède un pivot par colonne.

Exemple.

Considérons le système homogène
$$\begin{cases} 2x - 3y + 4z = 0 \\ x - y + 3z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \end{cases}$$

Les opérations élémentaires sur les lignes de la matrice augmentée associée nous donnent :

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 4 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \end{array} \right] \sim \dots \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

variable libre
↓

Par conséquent, le système possède des solutions non-triviales :

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} -5 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \text{ avec } t \in \mathbb{R}.$$

L'ensemble solution est donc $\text{Vect} \left\{ \begin{bmatrix} -5 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ ou $\text{Vect} \{(-5, -2, 1)\}$.

Théorème. Soit A une matrice de taille $m \times n$.

Supposons que l'équation $A\vec{x} = \vec{b}$ est consistante pour un certain $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$.

Soit $\vec{p} \in \mathbb{R}^n$ une solution de $A\vec{x} = \vec{b}$ (c'est-à-dire tel que $A\vec{p} = \vec{b}$).

La solution générale de $A\vec{x} = \vec{b}$ est l'ensemble des vecteurs de la forme $\vec{w} = \vec{p} + \vec{v}$ où $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ est une solution de $A\vec{x} = \vec{0}$.

Preuve. A voir : 1) $\vec{w} = \vec{p} + \vec{v}$ est une solution de $A\vec{x} = \vec{b}$

2) Toute solution s'écrit sous la forme $\vec{p} + \vec{v}$

1) Par hypothèse $\vec{p} \in \mathbb{R}^n$ est tel que $A\vec{p} = \vec{b}$

et $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ est tel que $A\vec{v} = \vec{0}$

$$\text{On a } A\vec{w} = A(\vec{p} + \vec{v}) = A\vec{p} + A\vec{v} = \vec{b} + \vec{0} = \vec{b}$$

2) Soit $\vec{u}$ une autre solution de $A\vec{x} = \vec{b}$

$$\text{On a } \left. \begin{array}{l} A\vec{u} = \vec{b} \\ A\vec{p} = \vec{b} \end{array} \right\} \Rightarrow A\vec{u} - A\vec{p} = \vec{b} - \vec{b} \Rightarrow A(\vec{u} - \vec{p}) = \vec{0}$$

$\Rightarrow \vec{v} = \vec{u} - \vec{p}$ est une solution de $A\vec{x} = \vec{0}$

$$\Rightarrow \vec{u} = \vec{p} + \vec{v}$$

■

Remarque.

Le théorème nous dit que pour obtenir toutes les solutions de $A\vec{x} = \vec{b}$ il suffit de connaître :

— une solution $\vec{p} \in \mathbb{R}^n$ de $A\vec{x} = \vec{b}$

— toutes les solutions de $A\vec{x} = \vec{0}$

Indépendance linéaire.

Définition.

Soient $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k$ k vecteurs de $\mathbb{R}^n$.

- On dit que l'ensemble $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k\}$ est **linéairement indépendant** (ou **libre**) si l'**unique solution** de l'équation vectorielle

$$x_1 \vec{v}_1 + x_2 \vec{v}_2 + \dots + x_k \vec{v}_k = \vec{0}$$

est la solution triviale $\vec{x} = \vec{0} \in \mathbb{R}^k$.

- On dit que l'ensemble $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k\}$ est **linéairement dépendant** (ou **lié**) si l'équation vectorielle

$$x_1 \vec{v}_1 + x_2 \vec{v}_2 + \dots + x_k \vec{v}_k = \vec{0}$$

possède une **infinité de solutions**.

En particulier, s'il existe des poids $c_1, \dots, c_k$ non tous nuls tels que :

$$\boxed{c_1 \vec{v}_1 + c_2 \vec{v}_2 + \dots + c_k \vec{v}_k = \vec{0}} \quad (*)$$

On appelle **(*)** une **relation de dépendance linéaire**.

Exemples.

1. Les vecteurs $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$ et $\vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 7 \end{bmatrix}$ sont linéairement indépendants car la matrice augmentée associée à l'équation vectorielle $x_1 \vec{v}_1 + x_2 \vec{v}_2 + x_3 \vec{v}_3 = \vec{0}$ est :

$$[\vec{v}_1 \ \vec{v}_2 \ \vec{v}_3 \ | \ \vec{0}] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right] \text{ (solution unique)}$$

2. Les vecteurs $\vec{w}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\vec{w}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$ et $\vec{w}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix}$ sont linéairement dépendants car la matrice augmentée associée à l'équation vectorielle $x_1 \vec{w}_1 + x_2 \vec{w}_2 + x_3 \vec{w}_3 = \vec{0}$ est :

$$[\vec{w}_1 \ \vec{w}_2 \ \vec{w}_3 \ | \ \vec{0}] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 6 & 0 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right], \text{ d'où } \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, t \in \mathbb{R}.$$

Une relation de dépendance linéaire est ici $2\vec{w}_1 - 2\vec{w}_2 + \vec{w}_3 = \vec{0}$.

Remarque.

Soient $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ n vecteurs de $\mathbb{R}^m$

et soit $A = [\vec{a}_1 \ \dots \ \vec{a}_n]$ la matrice de taille $m \times n$ de colonnes $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$.

Nous avons les équivalences suivantes :

$\{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n\}$ ensemble libre $\Leftrightarrow A\vec{x} = \vec{0}$ possède une solution unique.

$\{\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n\}$ ensemble lié $\Leftrightarrow A\vec{x} = \vec{0}$ possède une infinité de solutions.

Exemple.

Les colonnes de la matrice $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$ sont linéairement dépendantes car la solution de $A\vec{x} = \vec{0}$ est

$$\vec{x} = t \begin{bmatrix} -5 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \text{ avec } t \in \mathbb{R}.$$

Cas particuliers.

- L'ensemble $\{\vec{v}\}$ est linéairement indépendant si et seulement si $\vec{v} \neq \vec{0}$.
- L'ensemble $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ est linéairement indépendant si et seulement si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas multiples l'un de l'autre.

Théorème. (Caractérisation des ensembles linéairement dépendants)

Soient $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k$ k vecteurs de $\mathbb{R}^n$.

L'ensemble $S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k\}$ (avec $k \geq 2$) est linéairement dépendant si et seulement si, au moins un des vecteurs de S peut s'écrire comme combinaison linéaire des autres.

Preuve.

$\Leftarrow$) Si $\vec{v}_j = \alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 + \dots + \alpha_{j-1} \vec{v}_{j-1} + \alpha_{j+1} \vec{v}_{j+1} + \dots + \alpha_k \vec{v}_k$, alors :

$$\alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 + \dots + \alpha_{j-1} \vec{v}_{j-1} + (-1) \vec{v}_j + \alpha_{j+1} \vec{v}_{j+1} + \dots + \alpha_k \vec{v}_k = \vec{0}$$

(relation de dépendance linéaire car $-1 \neq 0$).

$\Rightarrow$) Supposons que $S = \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k\}$ est lié.

À voir : un des $\vec{v}_j$ s'écrit comme combinaison linéaire des autres.

- si $\vec{v}_1 = \vec{0}$ alors nous pouvons écrire $\vec{v}_1 = 0\vec{v}_2 + 0\vec{v}_3 + \dots + 0\vec{v}_k$.
- si $\vec{v}_1 \neq \vec{0}$ alors par hypothèse, il y a une relation de dépendance linéaire $c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + \dots + c_k\vec{v}_k = \vec{0}$, avec $c_1, \dots, c_k$ non tous nuls.

Soit j le plus grand indice tel que $c_j \neq 0$.

Comme $\vec{v}_1 \neq \vec{0}$, nous avons $j > 1$ car sinon, $c_1\vec{v}_1 = \vec{0}$, avec $c_1 \neq 0$ impossible!

Ainsi, $c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + \dots + c_j\vec{v}_j = \vec{0} \Rightarrow c_j\vec{v}_j = -c_1\vec{v}_1 - c_2\vec{v}_2 - \dots - c_{j-1}\vec{v}_{j-1}$

et $\vec{v}_j$ s'écrit comme combinaison linéaire de $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_{j-1}, \vec{v}_{j+1}, \dots, \vec{v}_k$:

$$\vec{v}_j = -\frac{c_1}{c_j}\vec{v}_1 - \frac{c_2}{c_j}\vec{v}_2 - \dots - \frac{c_{j-1}}{c_j}\vec{v}_{j-1} + 0\vec{v}_{j+1} + \dots + 0\vec{v}_k \quad \blacksquare$$

Théorème.

Soient $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k$ k vecteurs de $\mathbb{R}^n$.

Si $k > n$, alors les vecteurs $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k$ sont forcément liés.

Preuve.

La matrice $A = [\vec{v}_1 \dots \vec{v}_k]$ est une matrice de taille $n \times k$.

Si $k > n$, alors la matrice augmentée associée à $A\vec{x} = \vec{0}$ possède forcément des variables libres, ce qui implique la dépendance linéaire de $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k$. $\blacksquare$

Théorème.

Si un ensemble $S = \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k\}$ contient le vecteur nul, alors il est forcément lié.

Preuve.

Supposons que $\vec{v}_1 = \vec{0}$ (sinon on rénumérote les vecteurs).

Nous avons la relation de dépendance linéaire :

$$1\vec{v}_1 + 0\vec{v}_2 + 0\vec{v}_3 + \dots + 0\vec{v}_k = \vec{0}$$

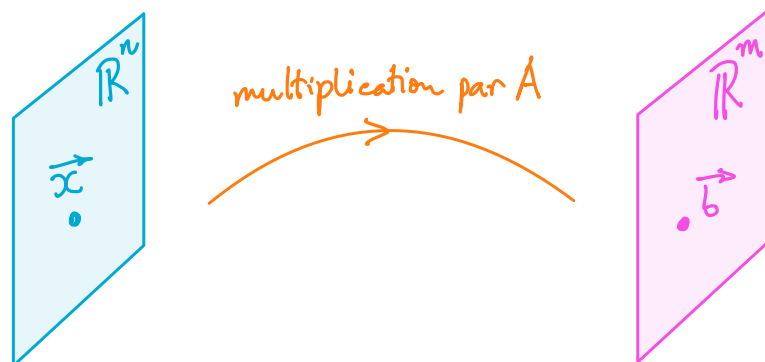
■

Introduction aux applications linéaires.

Soit A une matrice de taille $m \times n$. Soit $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ et soit $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$

L'équation matricielle $A\vec{x} = \vec{b}$ peut être vue sous forme

dynamique:



La matrice A "transforme" le vecteur $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ en $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$

Résoudre $A\vec{x} = \vec{b}$ revient à trouver $\vec{x}$ qui est transformé en $\vec{b}$.

Définition.

Une transformation T de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$ est une application qui à chaque $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ lui fait correspondre un unique $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$.

On note $T(\vec{x}) = \vec{b}$

L'ensemble $\mathbb{R}^n$ est appelé le domaine de T ou espace de départ.

L'ensemble $\mathbb{R}^m$ est appelé le codomaine de T ou espace d'arrivée.

L'ensemble $\{\vec{b} \in \mathbb{R}^m : \text{il existe } \vec{x} \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } T(\vec{x}) = \vec{b}\} \subset \mathbb{R}^m$ est appelé image de T , noté $\text{Im}(T)$.

Exemple important.

Soit $A = [\vec{a}_1 \dots \vec{a}_n]$ une matrice de taille $m \times n$.

On peut définir la transformation $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ suivante:

$$T(\vec{x}) = A\vec{x} = x_1\vec{a}_1 + \dots + x_n\vec{a}_n$$

appelée transformation matricielle associée à la matrice A .

Propriétés.

Soient $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a:

$$1. A(\vec{x} + \vec{y}) = A\vec{x} + A\vec{y} \Rightarrow T(\vec{x} + \vec{y}) = T(\vec{x}) + T(\vec{y})$$

$$2. A(\lambda\vec{x}) = \lambda(A\vec{x}) \Rightarrow T(\lambda\vec{x}) = \lambda T(\vec{x})$$

Définition.

Soit $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ une transformation. On dit que T est une **application linéaire** (ou **transformation linéaire**) si

1. $T(\vec{u} + \vec{v}) = T(\vec{u}) + T(\vec{v})$ pour tout $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$
2. $T(\lambda \vec{u}) = \lambda T(\vec{u})$ pour tout $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$ et $\lambda \in \mathbb{R}$

autrement dit, si

1. l'image de la somme de deux vecteurs
est la somme des images des deux vecteurs
2. l'image du multiple d'un vecteur
est le multiple de l'image du vecteur

Exemples.

1. $T: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto x^2$ **n'est pas linéaire** car $T(x+y) = (x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$
et $T(x) + T(y) = x^2 + y^2 \neq T(x+y)$
2. $T: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto \sqrt{x}$ **n'est pas linéaire** car $T(x+y) = \sqrt{x+y}$
et $T(x) + T(y) = \sqrt{x} + \sqrt{y} \neq T(x+y)$
3. $T: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ **est linéaire** car $T(x+y) = 9(x+y) = 9x + 9y = T(x) + T(y)$
 $x \mapsto 9x$
 $T(\lambda x) = 9(\lambda x) = \lambda(9x) = \lambda T(x)$
4. $T: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto 9x + 7$ **n'est pas linéaire** car $T(x+y) = 9(x+y) + 7$
et $T(x) + T(y) = 9x + 7 + 9y + 7$
 $= 9x + 9y + 14$
 $\neq T(x+y)$

5. $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3x_1 + 2x_2 \\ x_1 - 5x_2 \end{bmatrix}$ est linéaire;

$$\begin{aligned} T(\vec{u} + \vec{v}) &= T\left(\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}\right) = T\left(\begin{bmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3(u_1 + v_1) + 2(u_2 + v_2) \\ (u_1 + v_1) - 5(u_2 + v_2) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 3u_1 + 2u_2 \\ u_1 - 5u_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3v_1 + 2v_2 \\ v_1 - 5v_2 \end{bmatrix} \\ &= T(\vec{u}) + T(\vec{v}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T(\lambda \vec{u}) &= T\left(\lambda \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}\right) = T\left(\begin{bmatrix} \lambda u_1 \\ \lambda u_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3(\lambda u_1) + 2(\lambda u_2) \\ \lambda u_1 - 5(\lambda u_2) \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 3u_1 + 2u_2 \\ u_1 - 5u_2 \end{bmatrix} \\ &= \lambda T(\vec{u}) \end{aligned}$$

Proposition.

Si $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ est une application linéaire alors $T(\vec{0}) = \vec{0}$.

Preuve.

Nous avons : $T(\vec{0}) = T(\vec{0} \vec{u}) \stackrel{2.}{=} \vec{0} T(\vec{u}) = \vec{0}$ ■

Remarque.

La contra-réciproque de cette affirmation s'écrit:

"Si $T(\vec{0}) \neq \vec{0}$ alors $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ n'est pas une application linéaire"

et donne un critère simple pour décider si une transformation n'est pas une application linéaire:

Comme $T: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $T(x) = 3x + 7$ est telle que $T(0) = 7 \neq 0$, on conclut tout de suite que T n'est pas linéaire.

Attention: Si $T(\vec{0}) = \vec{0}$, alors T n'est pas forcément linéaire.

Conséquences de la définition.

Soit $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ une application linéaire. Alors:

a. $T(c\vec{u} + d\vec{v}) = cT(\vec{u}) + dT(\vec{v})$ pour tout $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$ et $c, d \in \mathbb{R}$

b. Principe de superposition:

$$T(c_1\vec{u}_1 + c_2\vec{u}_2 + \dots + c_k\vec{u}_k) = c_1T(\vec{u}_1) + c_2T(\vec{u}_2) + \dots + c_kT(\vec{u}_k)$$

pour tout $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k \in \mathbb{R}^n$ et $c_1, \dots, c_k \in \mathbb{R}$.

Preuve.

a. $T(c\vec{u} + d\vec{v}) \stackrel{1.}{=} T(c\vec{u}) + T(d\vec{v}) \stackrel{2.}{=} cT(\vec{u}) + dT(\vec{v})$

b. Il suffit d'écrire $c_1\vec{u}_1 + c_2\vec{u}_2 + \dots + c_k\vec{u}_k = c_1\vec{u}_1 + (c_2\vec{u}_2 + \dots + c_k\vec{u}_k)$ et utiliser la partie a (plusieurs fois). ■

Matrice d'une application linéaire.

Nous avons vu que pour toute matrice A de taille $m \times n$, la transformation matricielle $T(\vec{x}) = A\vec{x}$ est une application linéaire.

Nous allons voir maintenant que pour toute application linéaire $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ il existe une unique matrice A de taille $m \times n$ telle que $T(\vec{x}) = A\vec{x}$ pour tout $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$.

Exemple.

Soit $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par :

$$T(x, y) = (4x + 5y, 2x - y, 3x + 7y)$$

On a :

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 4x + 5y \\ 2x - y \\ 3x + 7y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4x \\ 2x \\ 3x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5y \\ -y \\ 7y \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 7 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 2 & -1 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}}_{=A} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

d'où $T(\vec{x}) = A\vec{x}$

On remarque que

$$T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 4+0 \\ 2-0 \\ 3+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0+5 \\ 0-1 \\ 0+7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 7 \end{bmatrix}$$

sont les colonnes de la matrice A .

Soient $\vec{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$, $\vec{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$, ..., $\vec{e}_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$

Soit $\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$ un vecteur quelconque.

Par construction, $\vec{x} = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + \dots + x_n \vec{e}_n$

autrement dit, $\vec{x} = [\vec{e}_1 \ \vec{e}_2 \ \dots \ \vec{e}_n] \vec{x}$

Définition.

La matrice $I_n = [\vec{e}_1 \ \vec{e}_2 \ \dots \ \vec{e}_n] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$

est appelée la **matrice identité** (ou **unité**) de taille $n \times n$.

Nous avons: $\vec{x} = I_n \vec{x}$

Soit $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ une application linéaire.

Soit $\vec{x} = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + \dots + x_n \vec{e}_n \in \mathbb{R}^n$ un vecteur quelconque.

Le principe de superposition implique:

$$T(\vec{x}) = x_1 T(\vec{e}_1) + x_2 T(\vec{e}_2) + \dots + x_n T(\vec{e}_n)$$

Ainsi, l'image de $\vec{x}$ est entièrement déterminée par les images des vecteurs $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$: il suffit de calculer $T(\vec{e}_1), \dots, T(\vec{e}_n)$ pour connaître $T(\vec{x})$ pour un vecteur $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ quelconque.

$$\text{Comme } T(\vec{x}) = x_1 T(\vec{e}_1) + x_2 T(\vec{e}_2) + \dots + x_n T(\vec{e}_n)$$

$$= [T(\vec{e}_1) \ T(\vec{e}_2) \ \dots \ T(\vec{e}_n)] \vec{x}$$

nous avons donc $T(\vec{x}) = A \vec{x}$ où $A = [T(\vec{e}_1) \ T(\vec{e}_2) \ \dots \ T(\vec{e}_n)]$

Définition.

Soit $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ une application linéaire. La matrice de taille $m \times n$ dont les colonnes sont les images des n vecteurs $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$:

$$A = [T(\vec{e}_1) \ T(\vec{e}_2) \ \dots \ T(\vec{e}_n)]$$

est appelée *matrice canoniquement associée à T* .

Théorème.

La matrice A canoniquement associée à T est l'unique matrice de taille $m \times n$ telle que $T(\vec{x}) = A\vec{x}$ pour tout $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$.

Conséquence.

L'application linéaire $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ est donc la transformation matricielle associée à la matrice $A = [T(\vec{e}_1) \ \dots \ T(\vec{e}_n)]$.

Nous avons l'équivalence:

$$\left. \begin{array}{l} T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m \\ \text{application linéaire} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m \\ \text{transformation matricielle} \end{array} \right.$$

Exemples.

Construire les matrices canoniquement associées aux applications linéaires suivantes:

1. $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par $T(x, y, z) = (4x - 2y + 3z, 5x + 6y, 9x - z)$

$$\left. \begin{aligned} T(1, 0, 0) &= (4 - 0 + 0, 5 + 0, 9 - 0) = (4, 5, 9) \\ T(0, 1, 0) &= (0 - 2 + 0, 0 + 6, 0 - 0) = (-2, 6, 0) \\ T(0, 0, 1) &= (0 - 0 + 3, 0 + 0, 0 - 1) = (3, 0, -1) \end{aligned} \right\} \Rightarrow A_T = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 3 \\ 5 & 6 & 0 \\ 9 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

matrice 3×3

2. $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $T(x, y, z) = (4x - 2y + 3z, 5x + 6y)$

$$\left. \begin{aligned} T(1, 0, 0) &= (4 - 0 + 0, 5 + 0) = (4, 5) \\ T(0, 1, 0) &= (0 - 2 + 0, 0 + 6) = (-2, 6) \\ T(0, 0, 1) &= (0 - 0 + 3, 0 + 0) = (3, 0) \end{aligned} \right\} \Rightarrow A_T = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 3 \\ 5 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

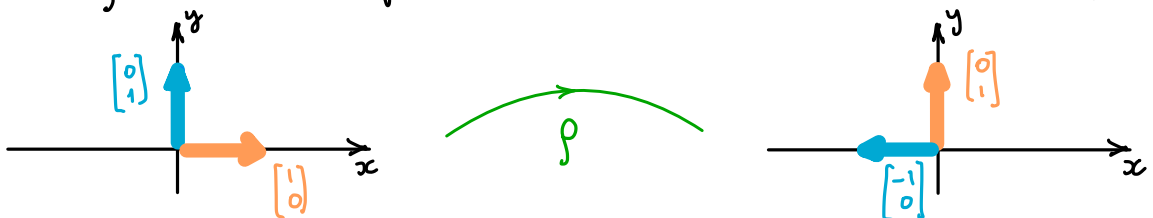
matrice 2×3

3. $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par $T(x, y) = (4x - 2y, 5x + 6y, 9x)$

$$\left. \begin{aligned} T(1, 0) &= (4 - 0, 5 + 0, 9) = (4, 5, 9) \\ T(0, 1) &= (0 - 2, 0 + 6, 0) = (-2, 6, 0) \end{aligned} \right\} \Rightarrow A_T = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 5 & 6 \\ 9 & 0 \end{bmatrix}$$

matrice 3×2

4. Rotation $\rho: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ d'angle $\frac{\pi}{2}$ autour de l'origine (dans le sens positif ⤴)

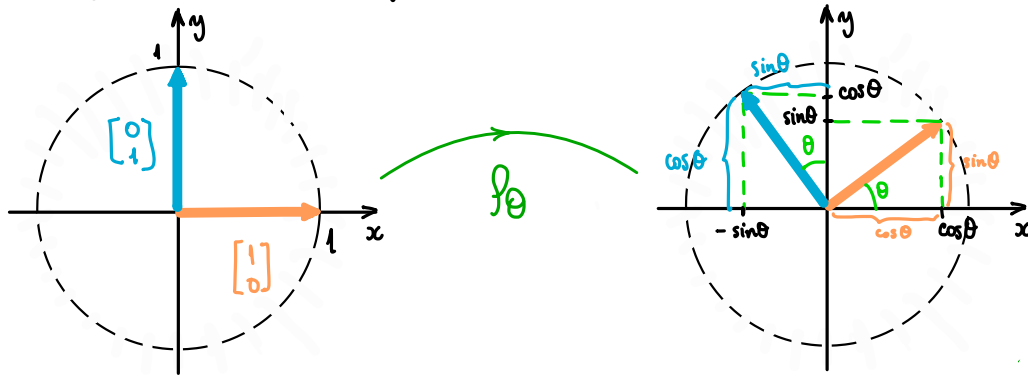


$$\left. \begin{aligned} \rho(1, 0) &= (-1, 0) \\ \rho(0, 1) &= (0, 1) \end{aligned} \right\} \Rightarrow A_\rho = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{d'où: } \rho(\vec{x}) = A_\rho \vec{x} \Leftrightarrow \rho\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \rho(x, y) = (-y, x) \text{ pour tout } (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

5. Rotation $f_\theta: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ d'angle θ autour de l'origine (dans le sens positif ↺).

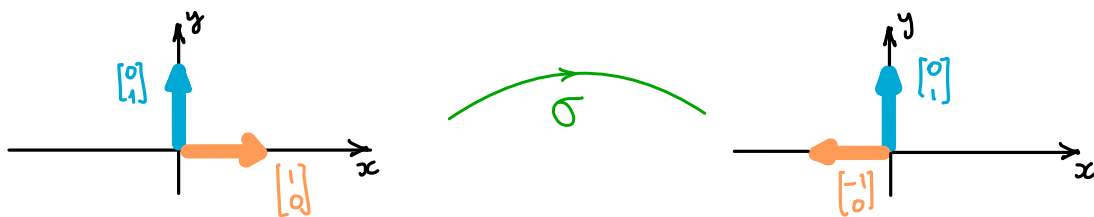


$$\left. \begin{aligned} f_\theta(1, 0) &= (\cos(\theta), \sin(\theta)) \\ f_\theta(0, 1) &= (-\sin(\theta), \cos(\theta)) \end{aligned} \right\} \Rightarrow A_{f_\theta} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

$$\text{d'où: } f_\theta(\vec{x}) = A_{f_\theta} \vec{x} \Leftrightarrow f_\theta\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow f_\theta(x, y) = (x \cos(\theta) - y \sin(\theta), x \sin(\theta) + y \cos(\theta)) \quad \text{pour tout } (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

6. Symétrie $\sigma: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ d'axe Oy ("miroir vertical")



$$\left. \begin{aligned} (1, 0) &= (-1, 0) \\ (0, 1) &= (0, 1) \end{aligned} \right\} \Rightarrow A_\sigma = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{d'où } \sigma(\vec{x}) = A_\sigma \vec{x} \Leftrightarrow \sigma\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \sigma\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \sigma(x, y) = (-x, y) \quad \text{pour tout } (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

Définition.

Soit $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ une transformation.

- On dit que T est **surjective** si $\text{Im}(T) = \mathbb{R}^m$: tout vecteur de $\mathbb{R}^m$ est image d'**au moins un** vecteur de $\mathbb{R}^n$, c'est-à-dire $T(\vec{x}) = \vec{b}$ admet **au moins une** solution $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ pour tout $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$.
- On dit que T est **injective** si tout vecteur de $\mathbb{R}^m$ est image d'**au plus un** vecteur de $\mathbb{R}^n$, c'est-à-dire $T(\vec{x}) = \vec{b}$ admet **au plus une** solution $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ pour tout $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$.
- On dit que T est **bijjective** si tout vecteur de $\mathbb{R}^m$ est image d'**exactement un** vecteur de $\mathbb{R}^n$.

Théorème.

Soit $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ une application linéaire.

On a l'équivalence:

T est **injective** $\Leftrightarrow \vec{x} = \vec{0}$ est l'**unique** solution de $T(\vec{x}) = \vec{0}$

Preuve.

$\Rightarrow$) Supposons que T est injective.

A voir: $\vec{x} = \vec{0}$ est l'unique solution de $T(\vec{x}) = \vec{0}$.

Comme T est linéaire, on a $T(\vec{0}) = \vec{0}$.

Par conséquent, $\vec{x} = \vec{0}$ est une solution de $T(\vec{x}) = \vec{0}$.

Comme T est injective, $T(\vec{x}) = \vec{0}$ admet **au plus une** solution.

Ainsi, $\vec{x} = \vec{0}$ est l'unique solution de $T(\vec{x}) = \vec{0}$.

⇐) On va montrer la contraposée :

“ Si T n'est pas injective alors $\vec{x}=\vec{0}$ n'est pas l'unique solution de $T(\vec{x})=\vec{0}$. ”

Supposons que T n'est pas injective.

Alors il existe (au moins) un $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$ tel que $T(\vec{x})=\vec{b}$

admet plus d'une solution. Soient $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$ deux solutions

distinctes :
$$\begin{cases} T(\vec{u})=\vec{b} \\ T(\vec{v})=\vec{b} \end{cases} \quad \text{avec } \vec{u} \neq \vec{v} \text{ (autrement dit, } \vec{u}-\vec{v} \neq \vec{0} \text{)}$$

Comme T est linéaire, on a

$$T(\vec{u}-\vec{v}) = T(\vec{u}) - T(\vec{v}) = \vec{b} - \vec{b} = \vec{0}$$

Ainsi, $\vec{u}-\vec{v} \neq \vec{0}$ est aussi une solution de $T(\vec{x})=\vec{0}$. ■

Théorème.

Soit $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ une application linéaire.

Soit A la matrice de taille $m \times n$ canoniquement associée à T .

Les affirmations suivantes sont équivalentes :

1. T injective

2. $T(\vec{x})=\vec{b}$ admet au plus une solution pour tout $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$

3. $\vec{x}=\vec{0}$ est l'unique solution de $T(\vec{x})=\vec{0}$

4. $\vec{x}=\vec{0}$ est l'unique solution de $A\vec{x}=\vec{0}$

5. $\vec{x}=\vec{0}$ est l'unique solution de $x_1\vec{a}_1 + \dots + x_n\vec{a}_n = \vec{0}$

6. Les n colonnes de A sont linéairement indépendantes.

7. La forme échelonnée-réduite associée à A a un pivot par colonne.

Théorème.

Soit $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ une application linéaire.

Soit A la matrice de taille $m \times n$ canoniquement associée à T .

Les affirmations suivantes sont équivalentes :

1. T surjective

2. $T(\vec{x}) = \vec{b}$ admet au moins une solution pour tout $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$

3. $A\vec{x} = \vec{b}$ admet au moins une solution pour tout $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$

4. Tout $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$ s'écrit comme combinaison linéaire des colonnes de A

5. Les n colonnes de A engendrent $\mathbb{R}^m$.

6. $\text{Vect} \{ \vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n \} = \mathbb{R}^m$

7. La forme échelonnée-réduite associée à A a un pivot par ligne.